

CHƯƠNG 6

PHÂN TÍCH MARKOV

Mục tiêu chương

Sau khi hoàn thành chương này, sinh viên có thể:

1. Nắm được những nội dung cơ bản của phân tích Markov;
2. Dự đoán trạng thái tương lai và xác định điều kiện cân bằng của quá trình Markov;
3. Vận dụng phân tích Markov vào kinh tế.

Nội dung chương

- 6.1. Giới thiệu về phân tích Markov
- 6.2. Dự đoán trạng thái tương lai
- 6.3. Điều kiện cân bằng và trạng thái hấp thụ
- 6.4. Các ứng dụng phổ biến của phân tích Markov

6.1. Giới thiệu về phân tích Markov

Phân tích Markov là một kỹ thuật ước tính xác suất các sự kiện xảy ra trong tương lai bằng việc phân tích xác suất đã biết trong hiện tại. Kỹ thuật này được ứng dụng rất rộng rãi trong quản trị kinh doanh, kết toán, marketing, kỹ thuật... bao gồm việc phân tích sự thay đổi thị phần, dự báo các khoản nợ khó đòi và xác định tình trạng hỏng hóc của máy móc thiết bị trong tương lai. Những phân tích Markov hỗ trợ cho những nhà quản trị đưa ra những quyết định có cơ sở khoa học và có hiệu quả.

Phân tích Markov giả định rằng hệ thống bắt đầu ở trạng thái ban đầu. Ví dụ, hai nhà sản xuất cạnh tranh với nhau có doanh số thị trường tương ứng 40% và 60% là các trạng thái ban đầu. Có lẽ trong hai tháng đến, thị phần của hai nhà sản xuất sẽ thay đổi, thị phần tương ứng là 45% và 55%. Dự đoán các trạng thái tương lai thì cần phải biết khả năng hay xác suất của hệ thống chuyển từ trạng thái này sang trạng thái khác. Các xác suất này thường được tập hợp và trình bày dưới dạng ma trận. Ma trận xác suất chuyển đổi cho biết khả năng hệ thống sẽ thay đổi từ một thời kỳ đến một thời kỳ kế tiếp. Đó là quá trình Markov và nó cho phép chúng ta dự đoán các trạng thái tương lai.

Mô hình quá trình Markov hữu ích trong việc nghiên cứu sự phát triển của hệ thống qua các chu trình lặp lại. Các chu trình lặp lại thông thường là các thời kỳ liên tiếp khi người ta không thể xác định một cách chắc chắn trạng thái của hệ thống tại một bất kỳ một thời kỳ nhất định. Thay vào đó, xác suất chuyển đổi được sử dụng để mô tả cách thức hệ thống chuyển đổi từ một thời kỳ này sang một thời kỳ kế tiếp. Do đó, chúng ta quan tâm đến xác suất của hệ thống ở một trạng thái nhất định tại một thời kỳ cụ thể.

Trong chương này, chúng ta tập trung phân tích quá trình Markov tuân thủ theo 4 giả thiết:

- Có một số hữu hạn các trạng thái;
- Xác suất thay đổi trạng thái không thay đổi theo thời gian;
- Chúng ta có thể dự đoán bất kỳ trạng thái tương lai dựa trạng thái trước đó và ma trận xác suất chuyển đổi;
- Qui mô và cấu trúc của hệ thống không thay đổi trong quá trình phân tích.

6.2. Dự đoán trạng thái tương lai

6.2.1. Trạng thái và xác suất trạng thái

Các trạng thái được dùng để xác định tất cả các điều kiện có thể xảy ra của một quá trình hay một hệ thống. Ví dụ, một thiết bị có thể ở một trong 2 trạng thái tại bất kỳ thời điểm nào: đang hoạt động tốt hay không tốt. Chúng ta có

thể gọi trạng thái thứ nhất là sự vận hành tốt của thiết bị và trạng thái thứ hai là sự vận hành không tốt của thiết bị.

Quả thật, có thể xác định trạng thái cụ thể cho nhiều quá trình hoặc hệ thống. Nếu chỉ có 3 cửa hàng tạp hoá ở một thị trấn nhỏ, một người dân có thể là khách hàng của một trong ba cửa hàng tại bất kỳ thời điểm nào. Do đó, có 3 trạng thái tương ứng với 3 cửa hàng tạp hoá. Nếu các sinh viên có thể theo một trong 3 chuyên ngành trong lĩnh vực quản trị (ví dụ quản trị kinh doanh tổng quát, quản trị kinh doanh quốc tế hay hệ thống thông tin quản trị), mỗi chuyên ngành có thể được xem như một trạng thái.

Trong phân tích Markov, chúng ta đồng thời giả thiết các trạng thái vừa có tính bao phủ chung và loại trừ lẫn nhau. Tính bao phủ chung có nghĩa là chúng ta có thể liệt kê tất cả các trạng thái có thể xảy ra của một hệ thống hay quá trình. Thảo luận của chúng ta về phân tích Markov giả thiết rằng có một số lượng hữu hạn các trạng thái cho bất kỳ hệ thống. Tính loại trừ lẫn nhau nghĩa là hệ thống có thể ở một trạng thái duy nhất tại bất kỳ thời điểm nào. Một sinh viên chỉ có thể đăng ký học một trong 3 chuyên ngành quản trị tại một thời điểm. Điều đó cũng có nghĩa một người chỉ có thể là một khách hàng của một trong 3 cửa hàng tạp hoá tại bất kỳ thời điểm nào.

Sau khi đã xác định các trạng thái, bước kế tiếp là xác định xác suất để hệ thống ở trạng thái này. Các thông tin này được trình bày bằng vector xác suất trạng thái.

Ký hiệu $\pi(i)$ là vector xác suất trạng thái cho thời kỳ i :

$$\pi(i) = (\pi_1 \pi_2 \pi_3 \dots \pi_n) \quad (6-1)$$

Trong đó: n là số trạng thái và π_j là xác suất ở trạng thái j ($j=1,2,\dots,n$).

Hãy xem xét một vài trường hợp:

Vector xác suất trạng thái của một thiết bị:

Trong một vài tình huống, khi chúng ta chỉ xem xét đến một đối tượng, chẳng hạn một thiết bị thì chúng ta hoàn toàn có khả năng biết chắc chắn trạng thái của đối tượng đó. Ví dụ, nếu chúng ta đang quan sát duy nhất một thiết bị thì tại một thời điểm có thể biết thiết bị đang hoạt động tốt hay không. Do đó, vector trạng thái có thể được biểu diễn như sau:

$$\pi(1) = (1 \ 0) \quad (6-2)$$

Trong đó: $\pi(1)$ là vector trạng thái của thiết bị trong thời kỳ 1, cụ thể:

$\pi_1 = 1$ là xác suất ở trạng thái 1

$\pi_2 = 0$ là xác suất ở trạng thái 2

Thông tin này cho biết xác suất để thiết bị hoạt động tốt (trạng thái 1) và xác suất để thiết bị hoạt động không tốt (trạng thái 2) trong thời kỳ đầu tiên. Tuy

nhiên, trong hầu hết các trường hợp, chúng ta xem xét đến nhiều hơn một đối tượng.

Vector xác suất trạng thái của 3 cửa hàng tạp hoá:

Hãy xem xét các vector trạng thái của người dân sống trong thị trấn nhỏ có 3 cửa hàng tạp hoá. Có tổng cộng 100000 khách hàng thường mua sắm tại 3 cửa hàng tạp hoá này trong bất kỳ tháng nào. Có 40000 khách hàng có thể mua sắm tại cửa hàng A, được gọi là trạng thái 1; có 30000 khách hàng có thể mua sắm tại cửa hàng B, được gọi là trạng thái 2 và có 30000 người có thể mua sắm tại cửa hàng C, được gọi là trạng thái 3. Xác suất để một người sẽ mua sắm tại một trong ba cửa hàng tạp hoá như sau:

Trạng thái 1: xác suất khách hàng mua sắm tại cửa hàng A là $40000/100000=0,40$

Trạng thái 2: xác suất khách hàng mua sắm tại cửa hàng B là $30000/100000=0,30$

Trạng thái 3: xác suất khách hàng mua tại cửa hàng C là $30000/100000=0,30$

Do vậy, vector xác suất trạng thái được biểu diễn như sau:

$$\pi(1) = (0,4 \ 0,3 \ 0,3)$$

Trong đó: $\pi(1)$ là vector xác suất trạng thái cho 3 cửa hàng tạp hoá ở thời kỳ 1, cụ thể:

$\pi_1=0,4$ là xác suất để khách hàng mua sắm tại cửa hàng A;

$\pi_2=0,3$ là xác suất để khách hàng mua sắm tại cửa hàng B;

$\pi_3=0,3$ là xác suất để khách hàng mua sắm tại cửa hàng C.

Đồng thời vector xác suất trạng thái cho biết thị phần của từng cửa hàng trong thời kỳ đầu tiên. Do vậy, cửa hàng A chiếm 40% thị trường, cửa hàng B chiếm 30% và cửa hàng C chiếm 30% thị trường ở thời kỳ 1.

Sau khi xác định các trạng thái ban đầu và xác suất trạng thái, bước tiếp theo là tìm ma trận xác suất chuyển đổi. Ma trận này cùng với xác suất trạng thái được sử dụng nhằm dự đoán tương lai.

Ma trận xác suất chuyển đổi

Ma trận cho phép chuyển từ một trạng thái hiện tại đến một trạng thái tương lai gọi là ma trận xác suất chuyển đổi. Đây là ma trận xác suất có điều kiện để chuyển đến trạng thái tương lai từ trạng thái hiện tại.

Gọi p_{ij} là xác suất có điều kiện để chuyển đến trạng thái j trong tương lai từ trạng thái hiện tại i .

Ví dụ: p_{12} là xác suất để sự kiện ở trạng thái 2 trong tương lai nếu như sự kiện ở trạng thái 1 trong thời kỳ trước đó.

Gọi P là ma trận xác suất chuyển đổi và sẽ có công thức như sau:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & p_{m3} & \cdots & p_{mn} \end{bmatrix} \quad (6-3)$$

Các giá trị của mỗi p_{ij} thường được xác định bằng thực nghiệm.

Ví dụ: nếu chúng ta đã quan sát theo thời gian là 10% số khách hàng đang mua sắm tại cửa hàng 1 (Trạng thái 1) sẽ chuyển đến mua sắm tại cửa hàng 2 (Trạng thái 2) trong thời kỳ kế tiếp thì chúng ta biết được $p_{12} = 0,1$ hoặc 10%.

Ma trận xác suất chuyển đổi cho 3 cửa hàng tạp hoá:

Giả thiết chúng ta xác định được ma trận xác suất chuyển đổi cho 3 cửa hàng tạp hoá bằng cách sử dụng các dữ liệu quá khứ. Kết quả phân tích của chúng ta được giới thiệu trong ma trận sau:

$$P = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \end{bmatrix}$$

△ Chú ý: xác suất ở mỗi hàng biểu diễn các xác suất của mỗi cửa hàng và có tổng bằng 1. Sau khi đã xác định xác suất trạng thái và ma trận xác suất chuyển đổi, chúng ta có khả năng dự đoán xác suất trạng thái trong tương lai.

6.2.2. Dự đoán trạng thái tương lai

Một trong các mục đích của phân tích Markov là dự đoán tương lai. Sau khi đã biết vector xác suất trạng thái và ma trận xác suất chuyển đổi thì việc xác định xác suất trạng thái tại một thời điểm trong tương lai tương đối đơn giản. Bằng cách phân tích này, chúng ta có khả năng tính toán được xác suất để một người mua sắm tại một trong các cửa hàng tạp hoá trong tương lai. Bởi vì xác suất này tương đương với thị phần nên chúng ta có thể tính toán thị phần tương lai của các cửa hàng A, B và C. Khi thời kỳ hiện tại là 1, tính toán xác suất trạng thái cho thời kỳ kế tiếp (thời kỳ 2) được tính theo công thức sau:

$$\pi(2) = \pi(1)P \quad (6-4)$$

Tổng quát hơn, nếu chúng ta đang ở thời kỳ n thì việc tính toán xác suất trạng thái cho thời kỳ $n + 1$ theo công thức sau:

$$\pi(n+1) = \pi(n)P \quad (6-5)$$

Phương trình (6-4) có thể được sử dụng để trả lời cho câu hỏi về thị phần trong thời kỳ kế tiếp của các cửa hàng tạp hoá. Các tính toán cụ thể như sau:

$$\pi(2) = \pi(1)P = [0,4 \quad 0,3 \quad 0,3] \begin{bmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \end{bmatrix} = [0,41 \quad 0,31 \quad 0,28]$$

Như vậy, thị phần cửa hàng A và cửa hàng B tăng trong khi thị phần cửa hàng C giảm. Liệu xu hướng này có tiếp tục trong tương lai hay không? Cuối cùng cửa hàng C có mất toàn bộ thị phần của họ hay không? Hay 3 cửa hàng sẽ đạt được trạng thái thị phần ổn định? Những vấn đề như vậy có thể được giải đáp khi chúng ta thảo luận về các điều kiện cân bằng.

6.2.3. Ứng dụng phân tích Markov

Ông chủ của phân xưởng lắp ráp đã theo dõi sự vận hành của các máy móc trong vài năm. Trong hai năm vừa qua, quan sát thấy 80% thời gian máy móc vận hành tốt trong tháng này nếu nó đã vận hành tốt trong tháng trước đó. Điều đó đồng thời có nghĩa chỉ có 20% thời gian máy móc đã vận hành không tốt trong tháng này khi nó đã vận hành tốt trong tháng trước đó. Thêm vào đó, 90% thời gian máy móc trong trạng thái không vận hành tốt trong tháng này nếu nó đã được vận hành không tốt trong tháng trước. Chỉ có 10% thời gian máy móc vận hành tốt trong tháng này khi nó đã không được vận hành tốt trong tháng trước đó. Hay nói cách khác, thiết bị có thể tự điều chỉnh sai sót khi nó không vận hành tốt trong quá khứ và khả năng này chiếm 10% thời gian. Các thông tin này dùng để xây dựng ma trận xác suất chuyển đổi. Trạng thái 1 là trạng thái máy móc vận hành tốt và trạng thái 2 là trạng thái máy móc vận hành không tốt. Ma trận xác suất chuyển đổi cho thiết bị này có thể mô tả như sau:

$$P = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,1 & 0,9 \end{bmatrix}$$

Trong đó:

$p_{11} = 0,8$ là xác suất máy móc sẽ vận hành tốt trong tháng này nếu nó vận hành tốt trong tháng trước;

$p_{12} = 0,2$ là xác suất máy móc sẽ vận hành không tốt trong tháng này nếu nó vận hành tốt trong tháng trước;

$p_{22} = 0,1$ là xác suất máy móc sẽ vận hành tốt trong tháng này nếu nó vận hành không tốt trong tháng trước;

$p_{21} = 0,9$ là xác suất máy móc sẽ vận hành không tốt trong tháng này nếu nó vận hành không tốt trong tháng trước.

△ Chú ý: hai xác suất ở hàng đầu tiên trong ma trận là các xác suất máy móc vận hành tốt và vận hành không tốt nếu nó vận hành tốt trong tháng trước. Bởi

vì các trạng thái này có tính bao phủ chung và tính loại trừ lẫn nhau nên tổng xác suất theo hàng bằng 1.

Xác suất để máy móc vận hành tốt trong một tháng sau là bao nhiêu? Xác suất để máy móc vận hành tốt trong 2 tháng là bao nhiêu? Để giải đáp câu hỏi này, chúng ta áp dụng công thức (6-4) và kết quả như sau:

$$\pi(2) = \pi(1)P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,1 & 0,9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \end{bmatrix}$$

Do vậy, xác suất để máy móc sẽ vận hành tốt sau một tháng với điều kiện nó đang vận hành tốt vào tháng này là 0,8. Xác suất để máy móc sẽ không vận hành tốt sau một tháng là 0,2. Bây giờ chúng ta có thể sử dụng kết quả này để xác định xác suất máy móc sẽ vận hành tốt sau 2 tháng.

$$\pi(3) = \pi(2)P = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,1 & 0,9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,66 & 0,34 \end{bmatrix}$$

Kết quả này cho thấy trong thời kỳ thứ ba hay tháng thứ ba, xác suất để máy móc vẫn vận hành tốt là 0,66. Xác suất để máy móc không vận hành tốt là 0,34. Tất nhiên, chúng ta có thể tiếp tục tính toán này nhiều lần nếu chúng ta muốn tính toán xác suất trạng thái cho các tháng trong tương lai.

6.3. Điều kiện cân bằng và trạng thái hấp thụ

6.3.1. Điều kiện cân bằng

Tiếp tục xem xét ví dụ về sự vận hành của máy móc, có thể suy đoán rằng cuối cùng các xác suất trạng thái sẽ là 0 hoặc 1. Điều này thường không xảy ra. Thông thường chúng ta sẽ gặp xác suất trạng thái cân bằng.

Một cách để tính toán xác suất trạng thái cân bằng là sử dụng phân tích Markov cho một số lượng lớn thời kỳ. Điều này có khả năng nhận thấy nếu các giá trị tương lai tiến gần một giá trị ổn định. Ví dụ, có thể lập lại phân tích Markov trong 15 thời kỳ cho ví dụ về sự vận hành của máy móc. Kết quả tính toán được thể hiện ở Bảng 6-1.

Máy móc khởi đầu vận hành tốt (trạng thái 1) trong thời kỳ thứ nhất. Trong thời kỳ thứ 5, chỉ có 0,4934 xác suất để máy móc tiếp tục vận hành tốt và đến thời kỳ 10, xác suất này chỉ còn 0,360235. Trong thời kỳ thứ 15, xác suất để máy móc tiếp tục vận hành tốt là khoảng 0,34. Xác suất để máy móc vận hành tốt tại một thời kỳ tương lai là giảm dần nhưng giảm với mức độ chậm. Chuyện gì mong đợi xảy ra trong thời gian dài hạn? Nếu chúng ta thực hiện việc tính toán cho 100 thời kỳ, chuyện gì xảy ra. Liệu có trạng thái cân bằng trong trường hợp này? Nhìn vào Bảng 6-1, cân bằng sẽ đạt tại trạng thái 0,333333 hoặc 1/3.

Bảng 6-1: Xác suất trạng thái trong 15 thời kỳ

Thời kỳ	Trạng thái 1	Trạng thái 2	Thời kỳ	Trạng thái 1	Trạng thái 2
1	1	0	9	0,371765	0,628234
2	0,8	0,2	10	0,360235	0,639754
3	0,66	0,34	11	0,352165	0,647834
4	0,562	0,438	12	0,346515	0,653484
5	0,4934	0,5066	13	0,342560	0,657439
6	0,44538	0,55462	14	0,339792	0,660207
7	0,411766	0,588234	15	0,337854	0,662145
8	0,388236	0,611763			

Theo định nghĩa, điều kiện cân bằng tồn tại nếu xác suất trạng thái không thay đổi sau một số lượng lớn thời kỳ. Do đó, tại thời điểm cân bằng, xác suất trạng thái cho thời kỳ tương lai phải bằng với xác suất trạng thái cho thời kỳ hiện tại. Đây chính là chìa khoá để giải quyết xác suất trạng thái cân bằng. Mỗi quan hệ này có thể được biểu diễn như sau:

Tại thời điểm cân bằng: $\pi(\text{thời kỳ tiếp}) = \pi(\text{thời kỳ này})$ hay:

$$\pi = \pi P \quad (6-6)$$

Phương trình (6-6) chứng tỏ tại cân bằng, xác suất trạng thái cho thời kỳ kế tiếp bằng xác suất trạng thái cho thời kỳ hiện tại.

Đối với ví dụ máy móc của Tolsky, điều này có thể biểu diễn như sau:

$$\pi = \pi P$$

$$(\pi_1, \pi_2) = (\pi_1, \pi_2) \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,1 & 0,9 \end{bmatrix}$$

Sử dụng phép nhân ma trận, chúng ta thu được:

$$(\pi_1 \quad \pi_2) = [0,8\pi_1 + 0,1\pi_2 \quad 0,2\pi_1 + 0,9\pi_2]$$

Do đó:

$$\pi_1 = 0,8 \pi_1 + 0,1 \pi_2 \quad (6-7)$$

$$\pi_2 = 0,2 \pi_1 + 0,9 \pi_2 \quad (6-8)$$

Chúng ta biết rằng xác suất trạng thái π_1 và π_2 có tổng bằng 1. Một cách tổng quát, tính chất này được biểu diễn như sau:

$$\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_n = 1 \quad (6-9)$$

Đối với ví dụ về sự vận hành của máy móc, chúng ta có:

$$\pi_1 + \pi_2 = 1 \quad (6-10)$$

Chúng ta có hệ 3 phương trình (6-7), (6-8) và (6-10). Cần thiết bỏ qua một phương trình để cuối cùng đạt được hệ 2 phương trình và 2 ẩn số. Nếu đi tìm điều kiện cân bằng liên quan đến 3 trạng thái, chúng ta sẽ thu được hệ 4 phương trình. Tương tự, chúng ta cần thiết bỏ qua một phương trình để thu được hệ 3 phương trình với 3 ẩn số. Tóm lại, khi đi tìm điều kiện cân bằng, luôn cần thiết phải bỏ một phương trình để cho tổng số phương trình ngang bằng với số ẩn số.

Giải hệ phương trình cho ví dụ về máy móc thì thu được kết quả $\pi_1 = 1/3$ và $\pi_2 = 2/3$. So sánh với kết quả ở Bảng 6-1. Như bạn đã thấy, xác suất trạng thái cân bằng cho trạng thái 1 là $1/3$ và xác suất trạng thái cân bằng cho trạng thái 2 là $2/3$. Đó là những giá trị mà bạn có thể dự đoán từ các kết quả trong bảng. Phân tích này cho thấy chỉ cần biết ma trận xác suất chuyển đổi để xác định xác suất trạng thái cân bằng. Các giá trị ban đầu của xác suất trạng thái không ảnh hưởng đến xác suất trạng thái cân bằng. Việc phân tích để xác định xác suất trạng thái cân bằng khi có nhiều trạng thái thì hoàn toàn giống với trường hợp này. Nếu có 3 trạng thái, chúng ta phải giải 3 phương trình để tìm 3 trạng thái cân bằng; nếu có 4 trạng thái, chúng ta phải giải 4 phương trình đồng thời để tìm 4 trạng thái cân bằng chưa biết.

Chúng ta có thể muốn tự chứng minh các trạng thái cân bằng mà chúng ta vừa tính toán đúng là các trạng thái cân bằng. Điều này có thể thực hiện bằng cách nhân xác suất trạng thái cân bằng với ma trận xác suất trạng thái. Kết quả sẽ bằng các trạng thái cân bằng. Thực hiện phân tích này đồng thời là một cách tuyệt vời để kiểm tra kết quả khi làm các bài tập hay bài kiểm tra.

6.3.2. Trạng thái hấp thụ và ma trận cơ bản

Chúng ta giả thiết rằng việc chuyển từ một trạng thái đến một trạng thái khác giữa hai thời kỳ nào đó là việc có thể thực hiện đối với một quá trình hay hệ thống. Trong vài trường hợp, nếu bạn đang ở một trạng thái nhất định thì không thể chuyển sang một trạng thái khác trong tương lai. Nói một cách khác, khi bạn đang ở một trạng thái cụ thể thì bạn bị “hấp thụ” với trạng thái này và tiếp tục giữ nguyên trạng thái này. Bất kỳ trạng thái nào có tính chất này được gọi là trạng thái hấp thụ. Một ví dụ về vấn đề này là ứng dụng trong phân tích các khoản phải thu.

Hệ thống các khoản phải thu thông thường sắp xếp các khoản nợ của khách hàng hay khoản phải thu từ khách hàng vào một trong các trạng thái phụ

thuộc mức độ quá hạn của các hoá đơn chưa thanh toán có thời hạn dài nhất. Tất nhiên, mỗi công ty phân loại các khoản nợ chưa thanh toán thành các trạng thái có thời hạn khác nhau phụ thuộc vào chính sách của công ty. Có 4 trạng thái tiêu biểu trong quản lý các khoản phải thu như sau:

Trạng thái 1 (π_1): đã thanh toán tất cả các hoá đơn;

Trạng thái 2 (π_2): nợ khó đòi, quá hạn nhiều hơn 3 tháng;

Trạng thái 3 (π_3): quá hạn ít hơn một tháng;

Trạng thái 4 (π_4): quá hạn từ một tháng đến 3 tháng.

Tại bất kỳ một thời kỳ nào, trong trường hợp này là một tháng, một khách hàng có thể ở một trong 4 trạng thái. Đối với ví dụ này, giả thiết rằng nếu hoá đơn chưa thanh toán có thời hạn dài nhất đã quá hạn trên 3 tháng thì tự động được xếp vào trạng thái – nợ khó đòi. Do đó, một khách hàng có thể đã thanh toán đầy đủ (trạng thái 1), có hoá đơn chưa thanh toán có thời hạn dài nhất đã quá hạn ít hơn một tháng (trạng thái 3), có hoá đơn chưa thanh toán có thời hạn dài nhất đã quá hạn từ một tháng đến 3 tháng (trạng thái 4) hoặc có hoá đơn chưa thanh toán có thời hạn dài nhất đã quá hạn trên 3 tháng, được gọi là nợ khó đòi (trạng thái 2).

Chúng ta xây dựng ma trận xác suất chuyển đổi cho 4 trạng thái. Ma trận này phản ánh xu hướng của các khách hàng dịch chuyển giữa 4 trạng thái các khoản phải thu từ tháng này đến tháng kế tiếp. Xác suất ở trạng thái đã thanh toán của bất kỳ một hoá đơn cho một tháng trong tương lai nếu như một khách hàng ở khoản mục đã thanh toán cho hàng hoá đã mua là 100%. Hoàn toàn không có khả năng đối với một khách hàng đã thanh toán đầy đủ tiền hàng vào một tháng và trở nên nợ khoản tiền đó vào một tháng trong tương lai. Một trạng thái hấp thụ khác là trạng thái khoản nợ khó đòi. Nếu một hóa lai không được thanh toán trong 3 tháng, chúng ta giả thiết là công ty này sẽ xoá khoản nợ này và không cố gắng thu khoản nợ này trong tương lai. Do vậy, một khi một khách hàng ở khoản mục nợ khó đòi thì sẽ ở nguyên trạng thái này. Đối với bất kỳ trạng thái hấp thụ nào, xác suất để khách hàng ở nguyên trạng thái đó trong tương lai là 1 và xác suất để khách hàng này ở bất kỳ trạng thái khác là 0.

Nhưng trước khi xây dựng ma trận xác suất chuyển đổi, chúng ta cần biết xác suất cho 2 trạng thái khác - khoản nợ ít hơn một tháng và khoản nợ từ một tháng đến 3 tháng. Đối với một khách hàng ở trạng thái nợ quá hạn ít hơn 1 tháng thì có xác suất 0,6 sẽ ở trạng thái đã thanh toán; có xác suất bằng 0 ở trạng thái nợ khó đòi; có xác suất 0,2 ở nguyên trạng thái nợ quá hạn ít hơn một tháng và xác suất 0,2 sẽ ở trạng thái nợ quá hạn từ 1 tháng đến 3 tháng. Lưu ý xác suất ở trạng thái nợ khó đòi bằng 0 vì không có thể chuyển từ trạng thái 3, nợ quá hạn ít hơn một tháng đến trạng thái 2, quá hạn trên 3 tháng chỉ

trong vòng một tháng. Đối với một khách hàng ở trạng thái nợ quá hạn từ 1 tháng đến 3 tháng, có xác suất 0,4 sẽ ở trạng thái đã thanh toán đầy đủ; có xác suất 0,1 sẽ ở trạng thái nợ khó đòi; có xác suất 0,3 sẽ ở trạng thái nợ ít hơn 1 tháng và có xác suất 0,2 ở nguyên trạng thái nợ từ 1 đến 3 tháng trong tháng kế tiếp. Bằng cách nào có thể xác định được xác suất chuyển từ trạng thái nợ từ 1 đến 3 tháng ở tháng này thành trạng thái nợ ít hơn một tháng trong tháng kế tiếp? Bởi vì các trạng thái nợ được xác định theo hoá đơn chưa thanh toán có thời hạn dài nhất nên có thể thanh toán một hoá đơn có thời hạn từ 1 đến 3 tháng và giữ nguyên hoá đơn khác có thời hạn ít hơn 1 tháng. Nói một cách khác, bất kỳ khách hàng có thể có nhiều hơn một hoá đơn chưa thanh toán tại bất kỳ thời điểm nào. Với những thông tin này, chúng ta có thể xây dựng được ma trận xác suất chuyển đổi của bài toán. Kết quả được trình bày trên Bảng 6-2.

Dựa vào Bảng 6-2, chúng ta bố trí các xác suất chuyển đổi trạng thái thành ma trận như (6-11).

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & 0,1 & 0,3 & 0,2 \end{bmatrix} \quad (6-11)$$

Bảng 6-2: Bảng ma trận xác suất chuyển đổi

Tháng này	Tháng kế tiếp			
	Thanh toán đủ	Nợ khó đòi	Ít hơn 1 tháng	1-3 tháng
Thanh toán đủ	1	0	0	0
Nợ khó đòi	0	1	0	0
Ít hơn 1 tháng	0,6	0	0,2	0,2
1-3 tháng	0,4	0,1	0,3	0,2

Nếu chúng ta biết được tỷ lệ khách hàng trong mỗi trạng thái cho bất kỳ thời kỳ nào, chúng ta có thể xác định tỷ lệ khách hàng trong mỗi trạng thái tại bất kỳ thời kỳ trong tương lai. Các tỷ lệ này được ghi thành vectơ xác suất trạng thái và được nhân với ma trận xác suất chuyển đổi.

Vấn đề đáng quan tâm là các điều kiện cân bằng. Tất nhiên, trong dài hạn các khách hàng sẽ ở trạng thái đã thanh toán đủ hoặc nợ khó đòi. Bởi vì đây là các trạng thái hấp thụ. Nhưng sẽ có bao nhiêu khách hàng, bao nhiêu khoản tiền sẽ ở trong mỗi trạng thái này? Biết được tổng số tiền sẽ nằm ở trạng thái đã

thanh toán đủ hay nợ khó đòi sẽ giúp cho công ty quản lý khoản nợ khó đòi và dòng tiền. Việc phân tích này yêu cầu sử dụng ma trận cơ bản.

Để tìm ma trận cơ bản, cần thiết phân chia ma trận chuyển đổi

$$P = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0,6 & 0 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & 0,1 & 0,3 & 0,2 \end{array} \right]$$

Trong đó: $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0,6 & 0 \\ 0,4 & 0,1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 \end{bmatrix}$

I là ma trận đơn vị (ma trận vuông có các thành phần nằm trên đường chéo bằng 1 và các thành phần khác bằng không).

0 là ma trận có tất cả các thành phần bằng không.

Ma trận cơ bản có thể được tính toán như sau:

$$F = (I - B)^{-1} \quad (6-12)$$

Chúng ta tính toán ma trận cơ bản cho bài toán các khoản phải thu.

$$F = (I - B)^{-1} \quad (6-13)$$

Hay:

$$F = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 0,8 & -0,2 \\ -0,3 & 0,8 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1,38 & 0,34 \\ 0,52 & 1,38 \end{bmatrix}$$

Bây giờ, chúng ta sử dụng ma trận cơ sở để dự đoán các khoản nợ khó đòi trong dài hạn. Trước tiên, chúng ta nhân ma trận cơ sở F với ma trận A. Kết quả tính toán như sau:

$$FA = \begin{bmatrix} 1,38 & 0,34 \\ 0,52 & 1,38 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,6 & 0 \\ 0,4 & 0,1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,97 & 0,03 \\ 0,86 & 0,14 \end{bmatrix}$$

Kết quả tính toán của ma trận FA có ý nghĩa quan trọng. Nó chỉ rõ xác suất để một khoản tiền đang ở các trạng thái không hấp thụ cuối cùng chuyển thành một trong các trạng thái hấp thụ. Dòng đầu tiên của ma trận cho biết xác suất một khoản tiền thuộc khoản mục nợ quá hạn ít hơn một tháng cuối cùng sẽ chuyển thành các khoản mục đã thanh toán đủ và nợ khó đòi. Xác suất để một khoản tiền nợ quá hạn ít hơn một tháng sẽ được thanh toán đầy đủ là 0,97 và xác suất để khoản tiền này biến thành khoản nợ quá hạn là 0,03. Dòng thứ 2 có nội dung giải thích tương tự cho trạng thái không hấp thụ khác – khoản

mục nợ quá hạn từ 1 tháng đến 3 tháng. Do vậy, 0,86 là xác suất để một khoản nợ có thời hạn từ 1 đến 3 tháng cuối cùng sẽ được thanh toán đủ và 0,14 là xác suất để một khoản nợ này biến thành khoản nợ khó đòi.

Ma trận cơ sở có thể sử dụng cho nhiều mục đích khác nhau. Nếu chúng ta biết khoản nợ quá hạn ít hơn một tháng và khoản nợ quá hạn từ 1 đến 3 tháng, chúng ta có thể xác định số tiền sẽ được thanh toán đầy đủ và khoản tiền có nguy cơ trở thành khoản nợ khó đòi. Gọi ma trận M thể hiện số tiền ở trong mỗi trạng thái không hấp thụ:

$$M = (M_1 \ M_2 \ M_3 \dots M_n)$$

Trong đó:

n là số trạng thái không hấp thụ

M_j là số tiền ở trạng thái thứ j ($j = \overline{1, n}$).

Giả thiết trạng thái nợ quá hạn ít hơn một tháng có 2000\$ và trạng thái nợ quá hạn từ một tháng đến 3 tháng có 5000\$. Khi đó, véc tơ M sẽ được biểu diễn như sau:

$$M = (2000 \ 5000)$$

Số tiền sẽ được thanh toán đầy đủ và khoản tiền trở thành nợ khó đòi có thể được tính toán bằng cách nhân ma trận M với ma trận FA vừa được tính toán ở trên. Khoản tiền được thanh toán đầy đủ và khoản nợ khó đòi được tính như sau:

$$MFA = (2000 \ 5000) \begin{bmatrix} 0,97 & 0,03 \\ 0,86 & 0,14 \end{bmatrix} = (6240 \ 760)$$

Như vậy trong tổng số 7000\$ (2000\$ nợ quá hạn ít hơn 1 tháng và 5000\$ nợ quá hạn từ một đến 3 tháng) thì 6240\$ sẽ được thanh toán đầy đủ và 760\$ cuối cùng trở thành khoản nợ khó đòi.

Chúng ta có thể sử dụng phân tích Markov để dự đoán trạng thái tương lai và xác định các điều kiện cân bằng đồng thời phân tích các trường hợp đặc biệt của phân tích Markov theo đó có một hay nhiều các trạng thái hấp thụ.

6.4. Các ứng dụng phổ biến của phân tích Markov

6.4.1. Ứng dụng phân tích thị phần

Giả sử chúng ta quan tâm đến việc phân tích thị phần và sự chung thủy của khách hàng đối với cửa hàng AT và CT là hai cửa hàng bán tạp hoá duy nhất tại một thành phố nhỏ. Chúng ta tập trung vào một chuỗi các lần mua sắm của một khách hàng và giả sử rằng khách hàng này mỗi tuần mua sắm một lần tại AT hoặc CT, nhưng không đi 2 siêu thị mua sắm trong một tuần.

Ứng dụng phân tích Markov, chúng ta quan niệm thời kỳ hàng tuần hay các lần mua hàng là các chu kỳ của quá trình. Do vậy, tại mỗi chu kỳ, khách hàng sẽ mua sắm tại cửa hàng AT hoặc CT. Một cửa hàng nhất định được chọn tại một tuần cụ thể được coi như là trạng thái của hệ thống tại thời kỳ đó. Tình huống này có hai trạng thái, vì số lượng các trạng thái là hữu hạn nên chúng ta có thể xác định mỗi trạng thái như sau:

Trạng thái 1: Khách hàng mua hàng tại cửa hàng AT

Trạng thái 2: Khách hàng mua hàng tại cửa hàng CT

Nếu chúng ta nói hệ thống ở trạng thái 1 tại chu kỳ 3, đơn giản chúng ta muốn nói rằng khách hàng mua sắm tại cửa hàng AT trong thời kỳ mua hàng vào tuần thứ 3.

Nếu chúng ta tiếp tục quá trình mua hàng trong tương lai thì chúng ta không thể nói chắc chắn là khách hàng sẽ mua ở cửa hàng nào vào một tuần hay một chu kỳ cụ thể. Tuy nhiên, sử dụng phân tích Markov, chúng ta có khả năng tính toán xác suất khách hàng mua hàng ở mỗi cửa hàng tại bất kỳ thời kỳ nào. Ví dụ, chúng ta có thể tìm thấy xác suất khách hàng sẽ mua sắm ở cửa hàng AT là 0,6 và xác suất khách hàng mua ở cửa hàng CT là 0,4 tại một tuần nhất định.

Để xác định xác suất của các trạng thái khác nhau xuất hiện tại các chu kỳ liên tiếp của quá trình Markov, chúng ta cần thông tin về xác suất một khách hàng giữ nguyên cửa hàng cũ hay thay đổi sang một cửa hàng cạnh tranh khi quá trình tiếp tục từ chu kỳ này đến chu kỳ khác hay tuần này đến tuần khác.

Giả sử rằng theo kết quả nghiên cứu thị trường, chúng ta thu thập số liệu từ 100 khách mua hàng trong 10 tuần. Giả sử thêm rằng các số liệu này cho biết mô hình mua sắm hàng tuần của mỗi khách hàng theo chuỗi các chu kỳ mua sắm ở cửa hàng AT và CT. Trong khi xem xét số liệu, rằng chúng ta phát hiện rằng tất cả khách hàng mua hàng ở cửa hàng AT tại một tuần cụ thể thì trong tuần tiếp theo 90% mua tiếp tục ở AT trong khi 10% chuyển sang mua ở cửa hàng CT. Giả sử từ một số liệu tương tự cho các khách hàng mua hàng ở CT tại một tuần cụ thể thì trong tuần tiếp theo 80% mua tiếp tại cửa hàng CT trong khi 20% chuyển đến mua ở cửa hàng AT. Đây chính là các xác suất chuyển đổi và đượ xác suất trên Bảng 6-3.

Bảng 6-3: Bảng ma trận xác suất chuyển đổi

Thời kỳ hiện tại	Thời kỳ kế tiếp	
	Cửa hàng AT	Cửa hàng CT
Cửa hàng AT	0,9	0,1
Cửa hàng CT	0,2	0,8

Và ma trận xác suất chuyển đổi:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{bmatrix}$$

Gọi $\pi(i)$ là vector xác suất trạng thái cho thời kỳ i với $i = 1, 2$ và được mô tả theo véc tơ như sau:

$$\pi(i) = (\pi_1 \ \pi_2)$$

Vector $\pi(1) = (1 \ 0)$ là véc tơ xác suất trạng thái cho thời kỳ 1 trong trường hợp khách hàng mua hàng tại cửa hàng AT tại thời kỳ 1. Xác suất trạng thái tại thời kỳ kế tiếp:

$$\begin{aligned} \pi(2) &= \pi(1)P \\ \pi(2) &= (1 \ 0) \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{bmatrix} = (0,9 \ 0,1) \end{aligned}$$

Sử dụng công thức (6-5), chúng ta có thể tính toán xác suất trạng thái tại thời kỳ thứ 2:

$$\pi(3) = \pi(2)P = (0,9 \ 0,1) \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{bmatrix} = (0,83 \ 0,17)$$

Bảng 6-4: Xác suất trạng thái tại thời kỳ tương lai nếu ban đầu ở trạng thái 1

Thời kỳ (n)	Xác suất trạng thái		Thời kỳ (n)	Xác suất trạng thái	
	$\pi_1(n)$	$\pi_2(n)$		$\pi_1(n)$	$\pi_2(n)$
0	1	0	6	0,706	0,294
1	0,9	0,1	7	0,694	0,306
2	0,83	0,17	8	0,686	0,314
3	0,781	0,219	9	0,680	0,320
4	0,747	0,253	10	0,676	0,324
5	0,723	0,277			

Nếu chúng ta bắt đầu với 1000 khách hàng của cửa hàng AT, nghĩa là có 1000 khách hàng mua hàng tại cửa hàng AT tại tuần đầu tiên thì tại tuần thứ 5, có 723 khách hàng sẽ tiếp tục mua ở cửa hàng AT và 277 khách hàng chuyển đến cửa hàng CT. Hơn thế nữa, ở tuần thứ 10 thì có 676 khách hàng vẫn mua hàng tại AT và 324 khách hàng chuyển đến cửa hàng CT.

Bây giờ chúng ta nghiên cứu trong tình huống ban đầu khách hàng mua hàng tại cửa hàng CT. Tính toán tương tự kết quả cụ thể được trình bày ở Bảng 6-5.

Bảng 6-5: Xác suất trạng thái tại các thời kỳ tương lai nếu ban đầu ở trạng thái 2

Thời kỳ (n)	Xác suất trạng thái		Thời kỳ (n)	Xác suất trạng thái	
	$\pi_1(n)$	$\pi_2(n)$		$\pi_1(n)$	$\pi_2(n)$
0	1	0	6	0,589	0,411
1	0,2	0,8	7	0,612	0,388
2	0,34	0,66	8	0,628	0,372
3	0,438	0,562	9	0,640	0,360
4	0,507	0,493	10	0,648	0,352
5	0,555	0,445			

Khi tiếp tục quá trình phân tích Markov, chúng ta phát hiện rằng xác suất của hệ thống ở một trạng thái nhất định sau nhiều thời kỳ thì độc lập với trạng thái ban đầu của hệ thống. Các xác suất mà chúng ta tiếp cận sau nhiều lần chuyển đổi được coi như là xác suất trạng thái ổn định. Phân tích Bảng 6-4, Bảng 6-5 cho thấy một khi n càng lớn hơn thì sự khác nhau giữa xác suất trạng thái tại thời kỳ n và (n+1) càng nhỏ dần. Các giá trị tương lai đang tiến dần đến một giá trị ổn định. Sử dụng công thức để xác định điều kiện cân bằng:

$$\pi = \pi P$$

$$(\pi_1 \ \pi_2) = (\pi_1 \ \pi_2) \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{bmatrix}$$

Từ đó, chúng ta thu được các phương trình:

$$\pi_1 = 0,9\pi_1 + 0,2\pi_2$$

$$\pi_2 = 0,1\pi_1 + 0,8\pi_2$$

Vì tổng xác suất trạng thái bằng 1 nên:

$$\pi_1 + \pi_2 = 1$$

Kết hợp các phương trình này, giải được: $\pi_1 = 2/3$, $\pi_2 = 1/3$.

Do vậy, nếu chúng ta có 1000 khách hàng ban đầu thì quá trình phân tích Markov cho biết rằng trong thời kỳ dài hạn có 667 khách hàng sẽ thuộc về cửa hàng AT và 333 khách hàng sẽ thuộc về cửa hàng CT. Xác suất trạng thái cân bằng có thể giải thích như là thị phần cho hai cửa hàng.

Thông tin thị phần thường có giá trị trong việc ra quyết định. Ví dụ, giả sử cửa hàng CT đang suy tính một chiến dịch quảng cáo nhằm thu hút nhiều khách hàng của cửa hàng AT. Hãy giả sử thêm rằng cửa hàng CT tin tưởng là chiến lược xúc tiến này sẽ làm tăng xác suất khách hàng của AT chuyển đổi

sang CT từ 0,10 đến 0,15. Ma trận xác suất chuyển đổi mới như sau:

$$P = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,2 & 0,8 \end{bmatrix}$$

Từ đó, phương trình xác định xác suất trạng thái cân bằng:

$$\pi_1 = 0,85\pi_1 + 0,2\pi_2$$

$$\pi_2 = 0,15\pi_1 + 0,8\pi_2$$

Kết hợp với $\pi_1 + \pi_2 = 1$, giải được: $\pi_1 = 0,57$ và $\pi_2 = 0,43$.

Chúng ta nhận thấy chiến lược xúc tiến bán hàng có khả năng làm tăng thị phần của CT từ $\pi_2 = 0,33$ đến $\pi_2 = 0,43$. Giả sử rằng toàn bộ thị trường bao gồm 6000 khách hàng theo tuần. Chiến lược xúc tiến mới sẽ gia tăng số lượng khách hàng đến mua sắm ở cửa hàng CT từ 2000 đến 2580. Nếu lợi nhuận trung bình hàng tuần cho mỗi khách hàng là 10\$ thì chiến lược xúc tiến này có thể kỳ vọng làm tăng lợi nhuận cho cửa hàng CT 5800\$ hàng tuần. Nếu chi phí cho chiến dịch xúc tiến này ít hơn 5800\$ cho mỗi tuần thì cửa hàng CT nên xem xét thực hiện chiến lược này.

Ví dụ này chứng tỏ việc phân tích Markov về thị phần của công ty có thể hữu ích cho việc ra quyết định. Giả sử thay vì thu hút khách hàng của AT, cửa hàng CT hướng nỗ lực xúc tiến nhằm gia tăng sự chung thủy của các khách hàng của họ. Trong trường hợp này p_{22} sẽ tăng và p_{21} sẽ giảm. Một khi biết được lượng thay đổi, chúng ta có thể tính được xác suất trạng thái ổn định mới và tính toán ảnh hưởng với lợi nhuận.

6.4.2. Ứng dụng phân tích các khoản phải thu

Một ứng dụng trong kế toán theo đó phân tích Markov đã mang lại những kết quả hữu ích trong việc dự phòng giảm giá cho các khoản phải thu không chắc chắn. Sự giảm giá trị này là sự ước lượng khoản tiền trong các khoản phải thu mà cuối cùng trở nên không thu được.

Hãy xem xét tình huống các khoản phải thu tại Công ty thương mại Thiên An. Công ty Thiên An phân loại các khoản phải thu theo 2 loại thời hạn nợ:

Các khoản nợ quá hạn từ 0 đến 30 ngày,

Các khoản nợ quá hạn từ 31 đến 90 ngày.

Nếu có bất kỳ khoản phải thu nào vượt quá hạn 90 ngày thì sẽ được kết toán thành khoản nợ khó đòi. Công ty Thiên An áp dụng qui định xác định thời hạn nợ cho tổng số dư đối với bất kỳ khách hàng nào theo hoá đơn chưa thanh toán có thời hạn dài nhất. Ví dụ, giả sử số dư trên tài khoản của một khách hàng vào ngày 30 tháng 9 như trên Bảng 6-6.

Bảng 6-6: Tài khoản của khách hàng

Ngày mua hàng	Số tiền nợ (tính bằng \$)
15/08	25
18/09	10
28/09	50
Tổng số	85

Phân hạng thời điểm các khoản phải thu vào ngày 30 tháng 9 sẽ công nhận tổng số tiền nợ 85\$ thuộc khoản nợ quá hạn từ 31-90 ngày bởi vì hoá đơn chưa trả tiền cho thời hạn dài nhất ngày 15 tháng 8 là 46 ngày. Giả sử rằng sau một tuần sau, ngày 7 tháng 10, khách hàng thanh toán hoá đơn của ngày 15 tháng 8, trị giá 25\$. Tổng số nợ còn lại bây giờ sẽ được xếp vào khoản nợ quá hạn từ 0-30 ngày bởi vì khoản tiền nợ dài nhất, tương ứng với việc mua hàng vào ngày 18 tháng 9 thì ít hơn 31 ngày. Phương pháp phân hạng độ tuổi các khoản phải thu này được gọi là phương pháp tổng số nợ bởi vì tổng số nợ được xếp vào khoản nợ theo thời hạn tương ứng với khoản nợ chưa thanh toán có thời hạn dài nhất.

Giả thiết rằng vào ngày 31 tháng 12 công ty Thiên An có tổng các khoản phải thu là 3000\$ và bộ phận quản lý muốn dự đoán rằng cuối cùng bao nhiêu tiền trong số đó sẽ được thanh toán đủ và bao nhiêu sẽ biến thành các khoản nợ khó đòi. Khoản ước tính nợ khó đòi sẽ là khoản dự phòng giảm giá cho các khoản phải thu không chắc chắn trong bản báo cáo tài chính cuối năm.

Trạng thái 1: Đã thanh toán

Trạng thái 2: Khoản nợ khó đòi

Trạng thái 3: Khoản nợ quá hạn từ 0-30 ngày (Loại 0-30)

Trạng thái 4: Khoản nợ quá hạn từ 31-90 ngày (Loại 31-90)

Các thông tin thu thập trong quá khứ cho phép Công ty Thiên An lập được ma trận xác suất chuyển đổi như sau:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,4 & 0 & 0,3 & 0,3 \\ 0,4 & 0,2 & 0,3 & 0,1 \end{bmatrix}$$

Trong đó $A = \begin{bmatrix} 0,4 & 0 \\ 0,4 & 0,2 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,3 \\ 0,3 & 0,1 \end{bmatrix}$.

Xác định ma trận cơ sở theo công thức:

$$F = (I - B)^{-1} = \begin{bmatrix} 1,67 & 0,56 \\ 0,56 & 1,30 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Theo đó, } I - B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,3 & 0,3 \\ 0,3 & 0,1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7 & -0,3 \\ -0,3 & 0,9 \end{bmatrix}$$

$$\text{Nên } F = \begin{bmatrix} 1,67 & 0,56 \\ 0,56 & 1,30 \end{bmatrix}$$

Nhân ma trận F với ma trận A cho kết quả như sau

$$FA = \begin{bmatrix} 1,67 & 0,56 \\ 0,56 & 1,30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,4 & 0,0 \\ 0,4 & 0,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,89 & 0,11 \\ 0,74 & 0,26 \end{bmatrix}$$

Hàng đầu tiên ma trận FA là xác suất để một dollar thuộc khoản nợ quá hạn từ 0-30 ngày sẽ chuyển đến mỗi trạng thái hấp thụ. Do vậy, chúng ta thấy rằng 0,89 là xác suất để một dollar thuộc khoản nợ quá hạn từ 0-30 ngày sẽ được thanh toán và có xác 0,11 xác suất sẽ trở thành khoản nợ khó đòi. Hàng thứ hai cung cấp các thông tin tương tự.

Xây dựng mức dự phòng giảm giá cho các khoản phải thu không chắc chắn

Đặt M là vector 2 thành phần có chứa số dư các khoản phải thu có thời hạn nợ 0-30 ngày và 31-90 ngày, nghĩa là:

$$M = (m_1 \ m_2)$$

Trong đó: m_1 là giá trị khoản nợ quá hạn từ 0-30 ngày và m_2 là giá trị khoản nợ quá hạn từ 31-90 ngày.

Giả sử vào ngày 31 tháng 12 số dư các khoản phải thu của Công ty Thiên An là 1000\$ là khoản nợ quá hạn từ 0-30 ngày (trạng thái 3) và 2000\$ là khoản nợ quá hạn từ 31-90 ngày (trạng thái 4):

$$M = (1000 \ 2000)$$

Chúng ta có thể nhân ma trận M với ma trận FA để xác định một khoản bao nhiêu trong 3000\$ sẽ thu được và một khoản bao nhiêu sẽ bị mất.

$$MFA = (1000 \ 2000) \begin{bmatrix} 0,89 & 0,11 \\ 0,74 & 0,26 \end{bmatrix} = (2370 \ 630)$$

Do đó, chúng ta nhận thấy 2370\$ trong số dư các khoản phải thu sẽ thu được tiền và 630\$ sẽ được kết toán như một khoản nợ khó đòi. Dựa vào phân tích này, bộ phận kế toán sẽ thiết lập mức giảm giá trị cho khoản phải thu không chắc chắn là 630\$. Giả sử rằng dựa vào phân tích trước đây, công ty Thiên An muốn nghiên cứu khả năng giảm khoản nợ khó đòi. Công ty đang xem xét việc thiết lập một chính sách tín dụng mới liên quan đến các khoản chiết khấu trả ngay. Bộ phận quản trị tin tưởng rằng chính sách tín dụng mới sẽ làm tăng

xác suất để khoản nợ quá hạn từ 0-30 sẽ được thanh toán đầy đủ và làm giảm xác suất để khoản nợ quá hạn từ 0-30 ngày thành khoản nợ quá hạn từ 31-90 ngày. Giả thiết rằng một nghiên cứu kỹ lưỡng các tác động của chính sách này cho phép bộ phận quản trị đưa ra ma trận xác suất chuyển đổi sau đây là hợp lý.

$$P = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0,6 & 0 & 0,3 & 0,1 \\ 0,4 & 0,2 & 0,3 & 0,1 \end{array} \right]$$

Chúng ta nhận thấy xác suất để một dollar thuộc khoản nợ quá hạn từ 0-30 ngày được thanh toán trong thời kỳ kế tiếp đã tăng lên 0,6 và xác suất để một đồng dollar thuộc khoản này chuyển thành khoản quá hạn từ 31-90 giảm xuống 0,1.

$$F = (I - B)^{-1} = \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,3 & 0,1 \\ 0,3 & 0,1 \end{bmatrix} \right]^{-1} = \begin{bmatrix} 0,7 & -0,1 \\ -0,3 & 0,9 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1,5 & 0,17 \\ 0,5 & 1,17 \end{bmatrix}$$

$$FA = \begin{bmatrix} 1,5 & 0,17 \\ 0,5 & 1,17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,6 & 0 \\ 0,4 & 0,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,97 & 0,03 \\ 0,77 & 0,23 \end{bmatrix}$$

Với chính sách tín dụng mới, chúng ta kỳ vọng chỉ 3% số tiền thuộc khoản nợ quá hạn 0-30 và 23% số tiền thuộc khoản nợ quá hạn 31-90 ngày sẽ không thu được tiền. Tương tự trên, chúng ta có:

$$MFA = \begin{pmatrix} 1000 & 2000 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0,97 & 0,03 \\ 0,77 & 0,23 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2510 & 490 \end{pmatrix}$$

Do vậy, chính sách tín dụng mới cho thấy tổn thất nợ khó đòi là 490\$. Với chính sách tín dụng trước đây, chúng ta đã thấy tổn thất nợ khó đòi là 630\$. Như vậy, chính sách tín dụng mới có khả năng tiết kiệm 630-490=140\$. Với tổng khoản phải thu là 3000\$ thì khoản tiết kiệm này thể hiện mức giảm 4,7% trong tổn thất nợ khó đòi. Sau khi xem xét các chi phí liên quan, bộ phận quản trị có thể đánh giá tính kinh tế của việc áp dụng chính sách tín dụng mới. Nếu chi phí, bao gồm chiết khấu, nhỏ hơn 4,7% tổng khoản phải thu, chúng ta mong đợi chính sách mới sẽ làm đưa đến lợi nhuận gia tăng cho công ty.

Phân tích Markov không nhằm tối ưu hoá bất kỳ khía cạnh nào của hệ thống. Thay vào đó, sự phân tích này dự đoán hoặc mô tả hành vi trạng thái ổn định và tương lai của hệ thống. Chẳng hạn, trong ví dụ cửa hàng bán tạp hoá, việc phân tích hành vi trạng thái ổn định mang đến một sự dự đoán hay tiên liệu về thị phần của các đối thủ cạnh tranh. Trong các ứng dụng khác, phân tích định

lượng đã mở rộng nghiên cứu quá trình Markov thành quá trình quyết định Markov. Trong những mô hình này, các quyết định có thể ban hành tại mỗi thời kỳ có ảnh hưởng đến xác suất chuyển đổi và do vậy ảnh hưởng đến hành vi tương lai của hệ thống.

Nội dung chương này chỉ đề cập đến 3 ứng dụng của phân tích Markov: dự báo thị phần, quản lý các khoản phải thu và theo dõi tình trạng của máy móc thiết bị. Ngoài ra, phân tích Markov đã được sử dụng trong phân tích nghiệp vụ bảo trì và hỏng hóc máy móc, hoạch định phân luồng bệnh tại bệnh viện, phát triển chiến lược kiểm tra, xác định thời hạn đăng ký báo và phân tích việc thay thế thiết bị. Nhìn chung, ứng dụng của phân tích này khá rộng, bất kỳ một hệ thống động nào thoả mãn các giả thiết của mô hình thì có thể sử dụng phương pháp tiếp cận Markov để phân tích.

Câu hỏi ôn tập

1. Thế nào là phân tích Markov?
2. Trình bày Ma trận xác suất chuyển đổi. Hãy dựa vào ma trận để dự đoán trạng thái tương lai.
3. Thế nào là trạng thái hấp thụ và ma trận cơ bản.
4. Trình bày ứng dụng phân tích Markov trong phân tích thị phần.
5. Trình bày ứng dụng phân tích Markov trong phân tích các khoản phải thu.

Bài tập

6.1 Ông chủ sở hữu của chiếc xe Honda Civic không biết chắc chắn khả năng chiếc xe mình khởi động tốt vào một ngày nhất định. Theo khảo sát dự đoán, khả năng 90% chiếc xe sẽ khởi động tốt nếu nó đã khởi động tốt vào sáng hôm trước và 70% nó sẽ không khởi động được nếu sáng hôm qua nó đã gặp trở ngại kỹ thuật khi khởi động.

- a. Xây dựng ma trận xác suất chuyển đổi;
- b. Xác suất chiếc xe sẽ khởi động tốt vào ngày mai nếu nó được khởi động tốt vào hôm nay;
- c. Xác suất chiếc xe sẽ khởi động tốt vào ngày mai nếu hôm nay nó gặp trở ngại khi khởi động.

6.2 Theo nhóm chuyên gia nghiên cứu thị trường gạch men, tình hình biến động khách hàng tiêu thụ giữa các công ty vào mỗi tháng như sau: Đối với công ty Ina, có 10% khách hàng chuyển sang sử dụng sản phẩm của Danu và

20% chuyển sang sử dụng sản phẩm của Santa. Đối với công ty Danu, có 5% khách hàng chuyển sang sử dụng sản phẩm của Ina và 10% chuyển sang sử dụng sản phẩm của Santa. Đối với công ty Santa, có 5% khách hàng chuyển sang sử dụng sản phẩm của Danu và 5% chuyển sang sử dụng sản phẩm của Ina. Tại thời điểm hiện tại, cả 3 công ty chiếm giữ thị phần bằng nhau.

- Dự đoán thị phần của 3 công ty trong tháng đến;
- Dự đoán thị phần của 3 công ty trong 3 tháng đến.

6.3 Hàng năm, Trung tâm công nghệ thông tin quản lý các kỳ thi kiểm tra năng lực về tin học. Các kỳ thi này sẽ xét các sinh viên miễn tham gia khoá học Nhập môn tin học cho các sinh viên có đủ năng lực. Kết quả kỳ thi có thể được xếp vào một trong các trạng thái sau:

Trạng thái 1: đạt yêu cầu của bài kiểm tra và được miễn tham gia khoá học.

Trạng thái 2: không đạt yêu cầu của bài kiểm tra trong lần thi thứ 3 và phải tham gia khoá học.

Trạng thái 3: không đạt yêu cầu của bài kiểm tra trong lần thi thứ 1.

Trạng thái 4: không đạt yêu cầu của bài kiểm tra trong lần thi thứ 2.

Chuyên gia giám sát kỳ thi tổng hợp số liệu và xây dựng ma trận xác suất chuyển đổi như sau:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,8 & 0 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,4 & 0,2 \end{bmatrix}$$

Hiện tại, có 200 sinh viên không đạt yêu cầu của bài kiểm tra trong lần thi thứ 1. Thêm vào đó, có 50 sinh viên không đạt yêu cầu của bài kiểm tra trong lần thi thứ 2.

- Xác định số sinh viên đạt yêu cầu của bài kiểm tra và được miễn tham gia khoá học này trong thời gian dài;
- Có bao nhiêu trong 250 sinh viên phải tham gia khoá học.

6.4. Trên thị trường hoá phẩm của một thành phố, hiện tại cửa hàng 1 chiếm 40% thị phần và cửa hàng 2 chiếm 60% thị phần. Theo quan sát của nhóm nghiên cứu thị trường vào mỗi thời kỳ, ở cửa hàng 1 có 80% khách hàng chung thuỷ và 20% khách hàng chuyển sang cửa hàng 2; ở cửa hàng 2 có 90% khách hàng chung thuỷ và 10% khách hàng chuyển sang cửa hàng 1.

- Xây dựng vector xác suất trạng thái và ma trận xác suất trạng thái;
- Xác định $\pi(2)$;
- Xác định điều kiện cân bằng và giải thích ý nghĩa.

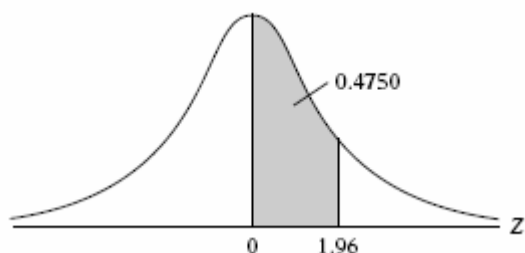
PHỤ LỤC

1. Giá trị phân phối chuẩn

Ví dụ:

$$P(0 \leq z \leq 1,96) = 0,4750$$

$$P(z \geq 1,96) = 0,5 - 0,4750 = 0,025$$



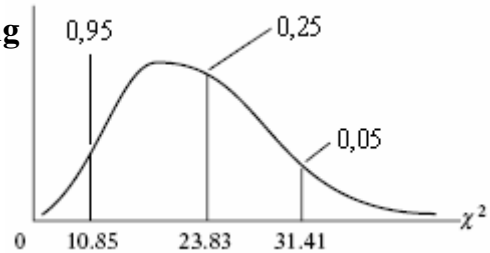
z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,000	0,004	0,008	0,012	0,016	0,020	0,024	0,028	0,032	0,036
0,1	0,040	0,044	0,048	0,052	0,056	0,060	0,064	0,067	0,071	0,075
0,2	0,079	0,083	0,087	0,091	0,095	0,099	0,103	0,106	0,110	0,114
0,3	0,118	0,122	0,126	0,129	0,133	0,137	0,141	0,144	0,148	0,152
0,4	0,155	0,159	0,163	0,166	0,170	0,174	0,177	0,181	0,184	0,188
0,5	0,191	0,195	0,198	0,202	0,205	0,209	0,212	0,216	0,219	0,222
0,6	0,226	0,229	0,232	0,236	0,239	0,242	0,245	0,249	0,252	0,255
0,7	0,258	0,261	0,264	0,267	0,270	0,273	0,276	0,279	0,282	0,285
0,8	0,288	0,291	0,294	0,297	0,300	0,302	0,305	0,308	0,311	0,313
0,9	0,316	0,319	0,321	0,324	0,326	0,329	0,331	0,334	0,336	0,339
1,0	0,341	0,344	0,346	0,348	0,351	0,353	0,355	0,358	0,360	0,362
1,1	0,364	0,367	0,369	0,371	0,373	0,375	0,377	0,379	0,381	0,383
1,2	0,385	0,387	0,389	0,391	0,393	0,394	0,396	0,398	0,400	0,401
1,3	0,403	0,405	0,407	0,408	0,410	0,411	0,413	0,415	0,416	0,418
1,4	0,419	0,421	0,422	0,424	0,425	0,426	0,428	0,429	0,431	0,432
1,5	0,433	0,434	0,436	0,437	0,438	0,439	0,441	0,442	0,443	0,444
1,6	0,445	0,446	0,447	0,448	0,449	0,451	0,452	0,453	0,454	0,454
1,7	0,455	0,456	0,457	0,458	0,459	0,460	0,461	0,462	0,462	0,463
1,8	0,464	0,465	0,466	0,466	0,467	0,468	0,469	0,469	0,470	0,471
1,9	0,471	0,472	0,473	0,473	0,474	0,474	0,475	0,476	0,476	0,477
2,0	0,477	0,478	0,478	0,479	0,479	0,480	0,480	0,481	0,481	0,482
2,1	0,482	0,483	0,483	0,483	0,484	0,484	0,485	0,485	0,485	0,486
2,2	0,486	0,486	0,487	0,487	0,487	0,488	0,488	0,488	0,489	0,489
2,3	0,489	0,490	0,490	0,490	0,490	0,491	0,491	0,491	0,491	0,492
2,4	0,492	0,492	0,492	0,492	0,493	0,493	0,493	0,493	0,493	0,494
2,5	0,494	0,494	0,494	0,494	0,494	0,495	0,495	0,495	0,495	0,495
2,6	0,495	0,495	0,496	0,496	0,496	0,496	0,496	0,496	0,496	0,496
2,7	0,497	0,497	0,497	0,497	0,497	0,497	0,497	0,497	0,497	0,497
2,8	0,497	0,498	0,498	0,498	0,498	0,498	0,498	0,498	0,498	0,498
2,9	0,498	0,498	0,498	0,498	0,498	0,498	0,498	0,499	0,499	0,499
3,0	0,499	0,499	0,499	0,499	0,499	0,499	0,499	0,499	0,499	0,499

2. Bảng phân phối Khi bình phương

Ví dụ: $df=20$

$$P(\chi^2 > 10,85) = 0,95$$

$$P(\chi^2 > 23,83) = 0,25$$



df	0,990	0,975	0,970	0,965	0,960	0,955
2	0,020	0,051	0,061	0,071	0,082	0,092
3	0,115	0,216	0,245	0,273	0,300	0,326
4	0,297	0,484	0,535	0,582	0,627	0,670
5	0,554	0,831	0,903	0,969	1,031	1,090
6	0,872	1,237	1,330	1,414	1,492	1,566
7	1,239	1,690	1,802	1,903	1,997	2,085
8	1,646	2,180	2,310	2,428	2,537	2,638
9	2,088	2,700	2,848	2,982	3,105	3,218
10	2,558	3,247	3,412	3,561	3,697	3,822
11	3,053	3,816	3,997	4,160	4,309	4,446
12	3,571	4,404	4,601	4,778	4,939	5,087
13	4,107	5,009	5,221	5,411	5,584	5,743
14	4,660	5,629	5,856	6,058	6,243	6,412
15	5,229	6,262	6,503	6,718	6,914	7,094
16	5,812	6,908	7,163	7,390	7,596	7,785
17	6,408	7,564	7,832	8,071	8,288	8,487
18	7,015	8,231	8,512	8,762	8,989	9,197
19	7,633	8,907	9,200	9,462	9,698	9,915
20	8,260	9,591	9,897	10,169	10,415	10,641
21	8,897	10,283	10,601	10,884	11,140	11,374
22	9,542	10,982	11,313	11,605	11,870	12,113
23	10,196	11,689	12,030	12,333	12,607	12,858
24	10,856	12,401	12,754	13,067	13,350	13,609
25	11,524	13,120	13,484	13,807	14,098	14,365
26	12,198	13,844	14,219	14,551	14,851	15,125
27	12,879	14,573	14,959	15,301	15,609	15,891
28	13,565	15,308	15,704	16,055	16,371	16,660
29	14,256	16,047	16,454	16,813	17,138	17,434
30	14,953	16,791	17,208	17,576	17,908	18,212
40	22,164	24,433	24,944	25,394	25,799	26,168
50	29,707	32,357	32,951	33,473	33,943	34,370
60	37,485	40,482	41,150	41,738	42,266	42,746
70	45,442	48,758	49,495	50,143	50,724	51,253
80	53,540	57,153	57,955	58,659	59,290	59,864
90	61,754	65,647	66,509	67,266	67,944	68,560

2. Bảng phân phối Khi bình phương (tiếp)

df	0,950	0,900	0,850	0,800	0,750	0,500
1	0,004	0,016	0,036	0,064	0,102	0,455
2	0,103	0,211	0,325	0,446	0,575	1,386
3	0,352	0,584	0,798	1,005	1,213	2,366
4	0,711	1,064	1,366	1,649	1,923	3,357
5	1,145	1,610	1,994	2,343	2,675	4,351
6	1,635	2,204	2,661	3,070	3,455	5,348
7	2,167	2,833	3,358	3,822	4,255	6,346
8	2,733	3,490	4,078	4,594	5,071	7,344
9	3,325	4,168	4,817	5,380	5,899	8,343
10	3,940	4,865	5,570	6,179	6,737	9,342
11	4,575	5,578	6,336	6,989	7,584	10,341
12	5,226	6,304	7,114	7,807	8,438	11,340
13	5,892	7,042	7,901	8,634	9,299	12,340
14	6,571	7,790	8,696	9,467	10,165	13,339
15	7,261	8,547	9,499	10,307	11,037	14,339
16	7,962	9,312	10,309	11,152	11,912	15,338
17	8,672	10,085	11,125	12,002	12,792	16,338
18	9,390	10,865	11,946	12,857	13,675	17,338
19	10,117	11,651	12,773	13,716	14,562	18,338
20	10,851	12,443	13,604	14,578	15,452	19,337
21	11,591	13,240	14,439	15,445	16,344	20,337
22	12,338	14,041	15,279	16,314	17,240	21,337
23	13,091	14,848	16,122	17,187	18,137	22,337
24	13,848	15,659	16,969	18,062	19,037	23,337
25	14,611	16,473	17,818	18,940	19,939	24,337
26	15,379	17,292	18,671	19,820	20,843	25,336
27	16,151	18,114	19,527	20,703	21,749	26,336
28	16,928	18,939	20,386	21,588	22,657	27,336
29	17,708	19,768	21,247	22,475	23,567	28,336
30	18,493	20,599	22,110	23,364	24,478	29,336
40	26,509	29,051	30,856	32,345	33,660	39,335
50	34,764	37,689	39,754	41,449	42,942	49,335
60	43,188	46,459	48,759	50,641	52,294	59,335
70	51,739	55,329	57,844	59,898	61,698	69,334
80	60,391	64,278	66,994	69,207	71,145	79,334
90	69,126	73,291	76,195	78,558	80,625	89,334
100	77,929	82,358	85,441	87,945	90,133	99,334

2. Bảng phân phối Khi bình phương (tiếp)

df	0,250	0,100	0,050	0,025	0,010	0,005
1	1,323	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879
2	2,773	4,605	5,991	7,378	9,210	10,597
3	4,108	6,251	7,815	9,348	11,345	12,838
4	5,385	7,779	9,488	11,143	13,277	14,860
5	6,626	9,236	11,070	12,833	15,086	16,750
6	7,841	10,645	12,592	14,449	16,812	18,548
7	9,037	12,017	14,067	16,013	18,475	20,278
8	10,219	13,362	15,507	17,535	20,090	21,955
9	11,389	14,684	16,919	19,023	21,666	23,589
10	12,549	15,987	18,307	20,483	23,209	25,188
11	13,701	17,275	19,675	21,920	24,725	26,757
12	14,845	18,549	21,026	23,337	26,217	28,300
13	15,984	19,812	22,362	24,736	27,688	29,819
14	17,117	21,064	23,685	26,119	29,141	31,319
15	18,245	22,307	24,996	27,488	30,578	32,801
16	19,369	23,542	26,296	28,845	32,000	34,267
17	20,489	24,769	27,587	30,191	33,409	35,718
18	21,605	25,989	28,869	31,526	34,805	37,156
19	22,718	27,204	30,144	32,852	36,191	38,582
20	23,828	28,412	31,410	34,170	37,566	39,997
21	24,935	29,615	32,671	35,479	38,932	41,401
22	26,039	30,813	33,924	36,781	40,289	42,796
23	27,141	32,007	35,172	38,076	41,638	44,181
24	28,241	33,196	36,415	39,364	42,980	45,559
25	29,339	34,382	37,652	40,646	44,314	46,928
26	30,435	35,563	38,885	41,923	45,642	48,290
27	31,528	36,741	40,113	43,195	46,963	49,645
28	32,620	37,916	41,337	44,461	48,278	50,993
29	33,711	39,087	42,557	45,722	49,588	52,336
30	34,800	40,256	43,773	46,979	50,892	53,672
40	45,616	51,805	55,758	59,342	63,691	66,766
50	56,334	63,167	67,505	71,420	76,154	79,490
60	66,981	74,397	79,082	83,298	88,379	91,952
70	77,577	85,527	90,531	95,023	100,425	104,215
90	98,650	107,565	113,145	118,136	124,116	128,299
100	109,141	118,498	124,342	129,561	135,807	140,169

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Bộ môn Điều khiển Kinh tế (1997), *Mô hình toán kinh tế*, Trường Đại học kinh tế quốc dân (lưu hành nội bộ), Hà Nội.
2. Đặng Hấn (1999), *Qui hoạch tuyến tính*, Trường Đại học Tp. Hồ chí Minh (lưu hành nội bộ)
3. Phan Quốc Khánh (2002), *Vận trù học*, NXB Giáo dục, Tp. Hồ Chí Minh.
4. Trần Đình Long (1997), *Lý thuyết Hệ thống*, NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội.
5. Nguyễn Quảng (1993), *Phương pháp PERT*, Trường Đại học Bách Khoa Đà Nẵng (lưu hành nội bộ).
6. Nguyễn Xuân Thuỷ (2005), *Phân tích định lượng trong quản trị*, NXB Thống kê, Tp. Hồ Chí Minh.
7. Trần Phước Trữ (1999), *Giáo trình Lý thuyết Hệ thống*, Huế.
8. Anderson, Sweeney, Williams (2003), *Quantitative Methods for Business*, 9e, Thomson.
9. Anderson, Sweeney, Williams (2002), *Quantitative Methods for Business with EasyQuant Tutor for Excel*, 2nd Edition, Thomson.
10. Barry Render, Ralph M. Stair, JR. (2001), *Quantitative Analysis for Management*, Seventh Edition, Prentice Hall International, Inc.
11. Bunday, B. D. (1996), *An Introduction to Queueing Theory*, Wiley
12. S. Christian Albright, Wayne L. Winston, Christopher Zappe (2004), *Data Analysis for Managers with Microsoft Excel (with CD-ROM and infotrac)*
13. S. Christian Albright, Wayne L. Winston (2003), *Practical Management Science (with CD-ROM Update): Spreadsheet Modeling and Applications*, 2nd edition, Thomson.
14. Glyn Burton, George Carroll, Stuart Wall (2002), *Quantitative Methods for Business and Economics*, 2nd Edition, Thomson.
15. Winston (2003), *Operations Research: Applications and Algorithms (with CD-ROM and infotrac)*, 2nd Edition, Thomson.
16. Winston, W. L. (1994) *Operations Research: Applications and Algorithms*, 3d ed. Duxbury Press.
17. Frank Dewhurst (2001), *Quantitative Methods for Business & Management*, UMIST, UK.