

CHƯƠNG 5

MÔ HÌNH HÀNG CHỜ

Mục tiêu chương

Sau khi hoàn thành chương này, sinh viên có thể:

1. Nắm được những thành phần cơ bản của hệ thống phục vụ;
2. Có thể thực hiện kiểm tra tính chất dòng vào của một hệ thống phục vụ;
3. Nắm được qui tắc thiết lập hệ phương trình trạng thái;
4. Hiểu và giải được các hệ thống phục vụ phổ biến trong kinh tế;
5. Hiểu được những khái niệm cơ bản của mô hình hàng chờ.

Nội dung chương

- 5.1. Dạng bài toán thường gặp trong kinh tế và phương hướng giải quyết
- 5.2. Các khái niệm cơ bản
- 5.3. Các điều kiện cần thiết để giải bài toán
- 5.4. Qui tắc thiết lập hệ phương trình trạng thái
- 5.5. Một số bài toán thường gặp trong kinh tế

Hãy nhớ lại những lần chúng ta phải đứng chờ tại quầy thu tiền ở siêu thị, đứng chờ mua xăng tại trạm xăng, chờ khám bệnh tại bệnh viện... Những trường hợp này và những trường hợp chờ khác, thời gian chờ là điều mà chúng ta không muốn. Chúng ta phải xác định những cách để tính thời gian chờ trong giới hạn cho phép.

Nhiều mô hình được phát triển nhằm giúp cho người quản trị hiểu và đưa ra những quyết định tốt hơn. Thuật ngữ của khoa học quản trị, hàng chờ được biết như là hàng và những kiến thức được sử dụng cho hàng chờ là lý thuyết hàng chờ. Những năm đầu của những năm 1900, A. K. Erlang, kỹ sư điện thoại Đan Mạch bắt đầu nghiên cứu sự tắc nghẽn và thời gian chờ trong những cuộc gọi điện thoại. Từ đó, lý thuyết hàng chờ đã phát triển và được sử dụng rộng rãi cho những tình huống hàng chờ. Những mô hình hàng chờ gồm những biểu thức và những mối liên hệ được dùng để xác định những chỉ tiêu phản ánh đặc trưng của các hệ thống. Vài chỉ tiêu thường dùng đối với mô hình hàng chờ là:

1. Xác suất hệ thống không có yêu cầu;
2. Số yêu cầu trung bình trong hàng chờ;
3. Số trung bình các yêu cầu có trong hệ thống;
4. Thời gian chờ trung bình của một yêu cầu trong hàng;
5. Thời gian chờ trung bình của một yêu cầu trong hệ thống;
6. Xác suất chờ của các yêu cầu...

Chương này sẽ nghiên cứu một số hệ thống đặc trưng và hình thành hệ thống chỉ tiêu đánh giá tình hình hoạt động của hệ thống.

5.1. Dạng bài toán thường gặp trong kinh tế và phương hướng giải quyết

5.1.1. Bài toán

Trong các hoạt động sản xuất kinh doanh cũng như đời sống hàng ngày đều tồn tại những hệ thống phục vụ như: Bến cảng, khách sạn, nhà hàng, trạm điện thoại, cửa hàng bán xăng dầu...

Trong các hệ thống ấy thường diễn ra 2 quá trình: Quá trình này sinh các yêu cầu và quá trình phục vụ các yêu cầu.

Tuy nhiên, trong quá trình hoạt động của hệ thống do nhiều nguyên nhân khác nhau thường dẫn đến các tình trạng:

- Khả năng phục vụ của hệ thống không đáp ứng yêu cầu và do đó dẫn đến kết quả là một số yêu cầu không được phục vụ hoặc phải chờ đợi để được phục vụ.

- Khả năng phục vụ của hệ thống vượt quá yêu cầu và dẫn đến kết quả là hệ thống không sử dụng hết năng lực về lao động, vật tư, thiết bị..

Cả hai tình trạng trên đều gây nên thiệt hại về mặt kinh tế nói chung. Vì vậy một bài toán đặt ra là phân tích bản chất của các quá trình diễn ra trong hệ thống và thiết lập mối quan hệ về lượng giữa các đặc trưng của các quá trình ấy. Trên cơ sở các mối liên hệ đã được xây dựng và các số liệu thu thập được từ hệ thống, tính toán, phân tích và đưa ra quyết định nhằm điều khiển hệ thống hoạt động có hiệu quả.

5.1.2. Phương hướng chung để giải bài toán

Để giải các bài toán trên, hiện nay người ta sử dụng hai phương pháp: Phương pháp mô hình hóa trên máy tính điện tử và phương pháp giải tích. Trong đó, phương pháp giải tích là phương pháp cơ bản và được sử dụng khá phổ biến. Đường lối chung của phương pháp này bao gồm các bước:

- Bước 1* Phân tích hệ thống mà chủ yếu là phân tích tính chất của dòng vào và các trạng thái của hệ thống;
- Bước 2* Thiết lập hệ phương trình trạng thái để giải ra các xác suất trạng thái;
- Bước 3* Giải hệ phương trình để tìm ra các xác suất trạng thái và từ đó thiết lập mối quan hệ giữa các chỉ tiêu cần phân tích;
- Bước 4* Tính toán, phân tích các chỉ tiêu, trên cơ sở đó đưa ra nhận xét và kết luận.

5.2. Các khái niệm cơ bản

a. Dòng yêu cầu đến hệ thống (dòng vào)

Dòng yêu cầu đến hệ thống là dòng các đối tượng đi đến hệ thống và đòi hỏi được thoả mãn một yêu cầu nào đó. Ví dụ: Dòng khách tới trung tâm bưu điện, dòng các tàu biển đến cảng để bốc dỡ hàng hóa... Dòng yêu cầu đến hệ thống là dòng biến cố ngẫu nhiên và tuân theo những phân phối xác suất nhất định, như phân phối Poisson, phân phối Erlang, phân phối đều...

Dòng Poisson có 3 tính chất sau:

- **Tính không hậu quả**

Dòng yêu cầu có tính không hậu quả có nghĩa là: nếu xác suất xuất hiện một số yêu cầu nào đó trong một khoảng thời gian nhất định không phụ thuộc vào việc đã có bao nhiêu yêu cầu xuất hiện trước khoảng thời gian đó. Hay nói khác, số yêu cầu xuất hiện trước và sau thời điểm t_0 nào đó không chịu ảnh hưởng qua lại lẫn nhau.

▪ Tính đơn nhất

Dòng yêu cầu có tính chất đơn nhất có nghĩa là: nếu xét trong khoảng thời gian khá bé thì biến cố “có nhiều hơn một yêu cầu xuất hiện” hầu như không xảy ra. Về mặt thời gian, chúng ta có thể xem dòng yêu cầu có tính chất đơn nhất nếu thời điểm xuất hiện các yêu cầu không trùng nhau.

▪ Tính dừng (tính thuần nhất theo thời gian)

Dòng yêu cầu có tính chất dừng có nghĩa là: nếu xác suất xuất hiện k yêu cầu trong khoảng thời gian τ chỉ phụ thuộc vào giá trị của τ và của k chứ không phụ thuộc vào việc khoảng thời gian τ này nằm ở vị trí nào trên dòng thời gian. Điều này có nghĩa là với những khoảng thời gian τ dài bằng nhau thì xác suất xuất hiện k yêu cầu như nhau. Nếu dòng vào là dòng tối giản thì:

$$p_k(\tau) = \frac{e^{-a} a^k}{k!}$$

- Trong đó:
- $p_k(\tau)$ là xác suất để trong khoảng thời gian τ có k yêu cầu xuất hiện;
 - k là số yêu cầu xuất hiện trong khoảng thời gian quan sát τ ;
 - a là số yêu cầu trung bình xuất hiện trong từng khoảng thời gian quan sát τ .

b. Hàng yêu cầu chờ phục vụ (hàng chờ)

Là tập hợp các yêu cầu sắp xếp theo một trật tự nào đó để chờ được phục vụ. Tuy nhiên, trong thực tế cũng có những hệ thống không có hàng chờ.

c. Kênh phục vụ

Kênh phục vụ là những thiết bị kỹ thuật, con người hoặc tổ hợp các thiết bị kỹ thuật và con người mà hệ thống sử dụng để phục vụ các yêu cầu đến hệ thống.

Một đặc trưng quan trọng nhất của các kênh phục vụ là thời gian phục vụ, đó là thời gian ít nhất mỗi kênh phải tiêu hao để phục vụ xong một yêu cầu. Thời gian phục vụ của các kênh là một đại lượng ngẫu nhiên tuân theo một qui luật phân phối xác suất nhất định, trong đó qui luật phân phối mũ là phổ biến nhất.

d. Dòng yêu cầu đi ra khỏi hệ thống (dòng ra)

Là dòng các yêu cầu đi ra khỏi hệ thống bao gồm các yêu cầu đã được phục vụ và các yêu cầu bị từ chối. Ở đây chúng ta chỉ chú ý đến dòng yêu cầu đã được phục vụ. Nếu dòng vào là dòng tối giản thì dòng phục vụ tại mỗi kênh sẽ là dòng xấp xỉ tối giản.

e. Nguyên tắc phục vụ của hệ thống

Đó là cách thức nhận các yêu cầu vào các kênh phục vụ. Nguyên tắc phục vụ

cho biết trường hợp nào thì các yêu cầu được nhận vào phục vụ và cách thức phân bổ các yêu cầu vào các kênh như thế nào. Đồng thời nguyên tắc phục vụ cũng cho biết trong trường hợp nào yêu cầu bị từ chối hoặc phải chờ và giới hạn cho phép của hàng chờ hoặc giới hạn của thời gian chờ.

5.3. Các điều kiện cần thiết để giải bài toán

5.3.1. Các điều kiện để bài toán có thể giải được

Điều kiện 1: Dòng vào của hệ thống phải là dòng tối giản hoặc xấp xỉ tối giản.

Điều kiện 2: Khoảng thời gian (T) giữa 2 lần xuất hiện liên tiếp các yêu cầu là đại lượng ngẫu nhiên tuân theo qui luật hàm số mũ.

Như vậy, hàm mật độ xác suất có dạng $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$

Và hàm phân phối xác suất có dạng $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$

Với λ là cường độ dòng vào, đó là số yêu cầu trung bình xuất hiện trong một đơn vị thời gian.

Điều kiện 3: Thời gian phục vụ của các kênh cũng là đại lượng ngẫu nhiên tuân theo qui luật hàm số mũ.

Như vậy, hàm mật độ xác suất có dạng $\varphi(t) = \mu e^{-\mu t}$

Và hàm phân phối xác suất có dạng $\Phi(t) = 1 - e^{-\mu t}$

Với μ là năng suất phục vụ của các kênh, đó là số yêu cầu được phục vụ tính bình quân trên một đơn vị thời gian.

5.3.2. Kiểm định dòng vào bằng tiêu chuẩn χ^2

Khi giải các bài toán thực nghiệm trước tiên phải xác định dòng yêu cầu đến hệ thống tuân theo qui luật gì. Muốn vậy, phải thành lập một mẫu ngẫu nhiên bằng cách quan sát theo thời gian dòng yêu cầu đến hệ thống trong một khoảng thời gian nào đó. Trên cơ sở số liệu thu thập được, giả thiết dòng yêu cầu đến hệ thống là dòng Poisson và dùng tiêu chuẩn χ^2 để kiểm định giả thuyết đó. Quá trình kiểm định giả thuyết được tiến hành theo các bước sau:

Bước 1 Xây dựng cặp giả thuyết:

H_0 : dòng vào là dòng Poisson

H_1 : dòng vào không phải là dòng Poisson

Bước 2 Phân khoảng thời gian dự định quan sát dòng yêu cầu đến hệ thống ra thành n khoảng thời gian nhỏ với $n \geq 50$ sau đó tiến hành quan sát số yêu cầu xuất hiện trong từng khoảng thời gian nhỏ ấy. Hệ thống số liệu thu được dưới dạng một bảng phân phối thực

nghiệm với đại lượng ngẫu nhiên là số yêu cầu đến hệ thống trong các khoảng thời gian.

Số yêu cầu xuất hiện trong từng khoảng thời gian nhỏ (x_i)	x_1	x_2	x_3	...	x_m
Số khoảng thời gian có số yêu cầu xuất hiện tương ứng (n_i)	n_1	n_2	n_3	...	n_m

Tính giá trị quan sát của đại lượng ngẫu nhiên χ^2 theo công thức:

$$\chi^2_{qs} = \sum_{i=1}^{m'} \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$$

Trong đó: n'_i là tần số lý thuyết tính theo công thức $n'_i = n \times p_{x_i}$ với p_{x_i} xác suất xuất hiện x_i yêu cầu được tính theo công thức Poisson:

$$p_{x_i} = \frac{e^{-a} a^{x_i}}{x_i!}$$

Với a là số yêu cầu trung bình xuất hiện trong khoảng thời gian quan sát:

$$a = \frac{\sum x_i n_i}{\sum n_i}$$

Với m' là số các giá trị quan sát đã được điều chỉnh theo yêu cầu $n_i \geq 5$ nghĩa là khi tính toán nếu có các $n'_i < 5$ thì chúng ta phải gom lại để bảo đảm tất cả các $n'_i \geq 5$.

Bước 3 Cho mức ý nghĩa α , sử dụng bảng phân bố χ^2 với mức ý nghĩa α và bậc tự do $(m'-2)$, chúng ta được $\chi^2_{(\alpha, m'-2)}$

Bước 4 So sánh giá trị quan sát χ^2_{qs} và giá trị $\chi^2_{(\alpha, m'-2)}$.

Nếu $\chi^2_{qs} > \chi^2_{(\alpha, m'-2)}$.

Kết luận: Bác bỏ H_0 tức dòng yêu cầu đến hệ thống không phải là dòng Poisson với mức ý nghĩa α .

Nếu $\chi^2_{qs} \leq \chi^2_{(\alpha, m'-2)}$

Kết luận: Dòng yêu cầu đến hệ thống là dòng Poisson với mức ý nghĩa α .

☉ Ví dụ: Để kiểm định dòng khách đến một cửa hàng có tuân theo qui luật phân phối Poisson hay không, người ta tiến hành quan sát một số khách đến cửa hàng trong khoảng thời gian 300 phút theo từng khoảng thời gian nhỏ 3 phút. Số liệu quan sát cho ở Bảng 5-1.

Bảng 5-1: Số liệu quan sát

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
n_i	0	5	11	14	22	18	14	8	4	2	1	1

Trong đó: - x_i là số khách đến cửa hàng trong từng khoảng thời gian nhỏ,

- n_i là số khoảng thời gian có số khách hàng tương ứng.

⚙ Giải: Trước tiên cần tính số khách bình quân trong từng khoảng thời gian nhỏ như sau:

$$a = \frac{\sum x_i n_i}{\sum n_i} = 4,62$$

Căn cứ vào số liệu, thực hiện tính toán giá trị χ^2 và kết quả như trên Bảng 5-2.

Bảng 5-2: Kết quả tính toán giá trị χ^2

x_i	n_i	P_{xi}	n_i'		$(n_i - n_i')^2$	$(n_i - n_i')^2 / n_i'$
0	0	0,01	1	5,6	0,36	0,064286
1	5	0,046	4,6			
2	11	0,105	10,5	10,5	0,25	0,02381
3	13	0,162	16,2	16,2	10,24	0,632099
4	22	0,187	18,7	18,7	10,89	0,582353
5	18	0,173	17,3	17,3	0,49	0,028324
6	14	0,133	13,3	13,3	0,49	0,036842
7	9	0,088	8,8	8,8	0,04	0,004545
8	4	0,051	5,1	9,4	1,96	0,208511
9	2	0,026	2,6			
10	1	0,012	1,2			
11	1	0,005	0,5			
4,62						1,580769

Bậc tự do sẽ là $k = m' - 2 = 8 - 2 = 6$. Tra bảng phân phối χ^2 với mức ý nghĩa $\alpha = 0,05$ và bậc tự do $k = 6$, kết quả $\chi^2_{(0,05;6)} = 12,59$. Như vậy: $\chi^2_{qs} = 1,58 < \chi^2_{(0,05;6)} = 12,59$.

Kết luận: Dòng khách đến cửa hàng tuân theo qui luật poisson với mức ý nghĩa 5%.

5.4. Quy tắc thiết lập hệ phương trình trạng thái

5.4.1. Quá trình thay đổi trạng thái và sơ đồ trạng thái

Quá trình thay đổi trạng thái của hệ thống phục vụ là quá trình ngẫu nhiên đặc biệt. Các trạng thái của quá trình được ký hiệu X_k (với k từ 0 đến n).

Quá trình thay đổi trạng thái của hệ thống có thể được thể hiện bằng một sơ đồ gọi là sơ đồ trạng thái.

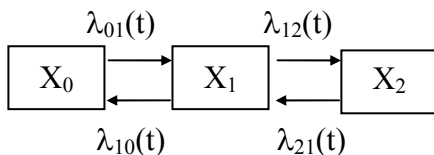
Sơ đồ trạng thái của một hệ thống phục vụ gồm các hình chữ nhật tượng trưng cho các trạng thái có thể có của hệ thống và các mũi tên nối các hình chữ nhật tượng trưng cho các quá trình chuyển từ trạng thái này sang trạng thái khác của hệ thống. Trên các mũi tên có ghi cường độ của dòng yêu cầu tác động làm thay đổi các trạng thái của hệ thống.

⊙ Ví dụ: xét quá trình thay đổi trạng thái của cửa hàng có 2 nhân viên bán hàng. Quá trình thay đổi trạng thái của cửa hàng chính là quá trình thay đổi số nhân viên bận việc. Chúng ta thấy, trạng thái của cửa hàng gồm có 3 trạng thái: X_0 là trạng thái cửa hàng cả hai nhân viên rỗi và X_1 là trạng thái cửa hàng có 1 nhân viên bận và X_2 là trạng thái cửa hàng có 2 nhân viên bận.

Ký hiệu: - $\lambda_{01}(t)$, $\lambda_{12}(t)$ là cường độ dòng khách vào cửa hàng.

- $\lambda_{10}(t)$, $\lambda_{21}(t)$ là cường độ phục vụ của cửa hàng.

Như vậy, sơ đồ trạng thái của cửa hàng:



5.4.2. Quy tắc thiết lập hệ phương trình trạng thái

Qui tắc: Đạo hàm bậc nhất theo thời gian của các xác suất trạng thái bằng tổng đại số của tích giữa cường độ dòng hướng theo mũi tên và xác suất của trạng thái mà mũi tên xuất phát.

Để có thể biểu diễn qui tắc này, chúng ta qui ước sau:

Giả sử hệ thống có n kênh. Gọi X_j và X_k là 2 trạng thái liên tiếp của hệ thống và X_k là trạng thái đang xét, chúng ta qui ước như sau:

- Việc chuyển từ trạng thái X_j sang X_k , đại lượng tích mang dấu dương (+);
- Việc chuyển từ trạng thái X_k sang X_j , đại lượng tích mang dấu âm (-).

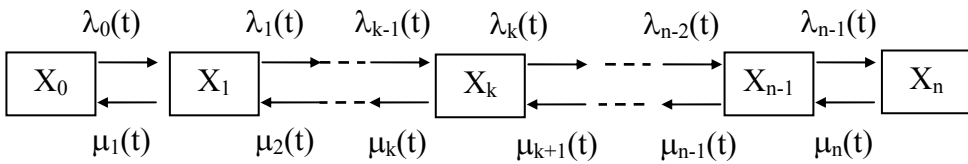
Khi đó, hệ phương trình trạng thái sẽ là:

$$\begin{cases} p'_k(t) &= \sum_{j \neq k} \lambda_{jk}(t)p_j(t) - \sum_{j \neq k} \lambda_{kj}(t)p_k(t) \\ \sum_{k=0}^n p_k(t) &= 1 \end{cases}$$

5.4.3. Quá trình sinh và tử

Hầu hết các hệ thống phục vụ mà chúng ta đang nghiên cứu ở đây (trong phạm vi của chương) đều có một quá trình thay đổi trạng thái đặc biệt sau đây gọi là quá trình sinh và tử.

Hình 5-1: Sơ đồ quá trình sinh và tử



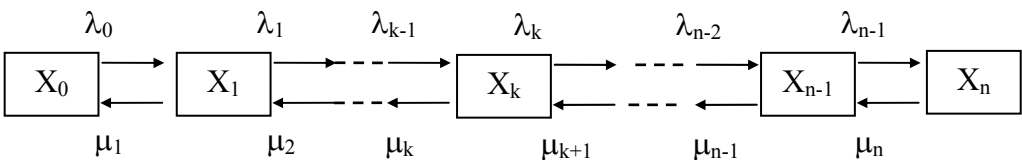
Cần chú ý rằng trong sơ đồ, tất cả các trạng thái đều có 4 mũi tên liên hệ trừ 2 trạng thái biên chỉ có 2 mũi tên liên hệ.

Từ sơ đồ trạng thái và qui tắc thiết lập hệ phương trình trạng thái, hệ phương trình trạng thái của quá trình sinh và tử được viết như sau:

$$\begin{cases} p'_0(t) &= -\lambda_0(t)p_0(t) + \mu_1(t)p_1(t) \\ \vdots & \vdots \\ p'_k(t) &= \lambda_{k-1}(t)p_{k-1}(t) - \mu_k(t)p_k(t) - \lambda_k(t)p_k(t) + \mu_{k+1}(t)p_{k+1}(t) \\ \vdots & \vdots \\ p'_n(t) &= \lambda_{n-1}(t)p_{n-1}(t) - \mu_n(t)p_n(t) \\ \sum_{k=0}^n p_k(t) &= 1 \end{cases}$$

Nếu quá trình thay đổi trạng thái của hệ thống diễn ra dưới tác động của dòng tối giản thì $\lambda_k(t) = \lambda_k$, $\mu_k(t) = \mu_k$ và $P_k(t) = P_k$. Do đó, sơ đồ trạng thái sẽ là:

Hình 5-2: Sơ đồ quá trình sinh tử của dòng tối giản



Từ sơ đồ trạng thái, sử dụng qui tắc thiết lập hệ phương trình trạng thái để xây dựng hệ phương trình trạng thái và kết quả như sau:

$$\begin{cases} 0 &= -\lambda_0 p_0 + \mu_1 p_1 \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 0 &= \lambda_{k-1} p_{k-1} - \mu_k p_k - \lambda_k p_k + \mu_{k+1} p_{k+1} \quad k = \overline{1, n-1} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 0 &= \lambda_{n-1} p_{n-1} - \mu_n p_n \\ \sum_{k=0}^n p_k &= 1 \end{cases}$$

Để giải hệ phương trình này, đặt $U_k = -\lambda_{k-1} p_{k-1} + \mu_k p_k$ $k = \overline{1, n}$ và kết quả sẽ:

$$\begin{cases} 0 &= U_1 \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 0 &= -U_k + U_{k+1} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 0 &= -U_n \\ \sum_{k=0}^n p_k &= 1 \end{cases}$$

Qua hệ phương trình, $U_k = 0$ ($k = \overline{1, n}$) hay $-\lambda_{k-1} p_{k-1} + \mu_k p_k = 0$, vậy:

$$p_k = \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} p_{k-1} \quad \forall k = \overline{1, n}$$

Thực hiện truy toán như sau:

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} \cdot \frac{\lambda_{k-2}}{\mu_{k-1}} p_{k-2} \\ &= \dots \\ &= \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} \cdot \frac{\lambda_{k-2}}{\mu_{k-1}} \dots \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0 \\ p_k &= \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} p_0 \quad \forall k = \overline{1, n} \end{aligned}$$

Như vậy để tính p_k , cần thực hiện tính toán p_0 . Vì:

$$\sum_{k=0}^n p_k = 1 = p_0 + \sum_{k=1}^n p_k = p_0 + \sum_{k=1}^n \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} p_0 = p_0 \left(1 + \sum_{k=1}^n \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} \right)$$

Nên, p_0 được xác định như sau:

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^n \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}}$$

5.5. Một số bài toán thường gặp trong kinh tế

5.5.1. Hệ thống từ chối cổ điển Erlang (M/M/n)

a. Bài toán

Một hệ thống gồm có n kênh phục vụ, năng suất như nhau và bằng μ (μ : số yêu cầu được phục vụ trong một đơn vị thời gian trên một kênh). Dòng yêu cầu đến hệ thống là dòng tối giản với cường độ λ (λ : số yêu cầu đến hệ thống trong một đơn vị thời gian). Thời gian phục vụ của các kênh là đại lượng ngẫu nhiên tuân theo qui luật hàm số mũ với tham số μ . Hệ thống phục vụ theo nguyên tắc: một yêu cầu đến hệ thống nếu gặp lúc trong hệ thống có ít nhất một kênh rỗi thì được nhận vào phục vụ tại một kênh rỗi. Ngược lại, gặp lúc mọi kênh đều bận thì bị từ chối và đi ra khỏi hệ thống. Hãy thiết lập hệ thống chỉ tiêu để phân tích đánh giá tình hình hoạt động của hệ thống.

b. Sơ đồ trạng thái và xác suất trạng thái

Theo giả thiết bài toán, chúng ta thấy hệ thống có các trạng thái sau:

X_0 là trạng thái trong hệ thống không có yêu cầu;

X_k ($k = \overline{1, n}$) là trạng thái hệ thống có k yêu cầu.

Theo nguyên tắc hoạt động của hệ thống, dưới tác động của dòng vào cường độ λ thì các trạng thái của hệ thống thay đổi trạng thái theo hướng

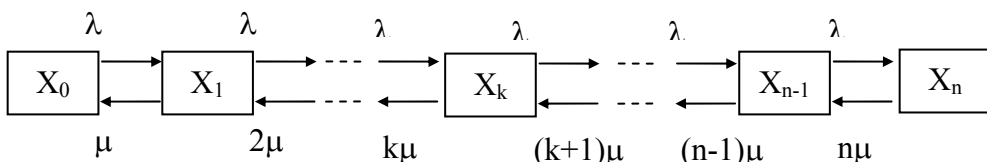
$X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow X_k \longrightarrow \dots \longrightarrow X_{n-1} \longrightarrow X_n$

Ngược lại, dưới tác động của dòng phục vụ tại k kênh với năng suất $k\mu$ ($k = \overline{1, n}$) thì các trạng thái của hệ thống thay đổi trạng thái theo hướng:

$X_n \longrightarrow X_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow X_k \longrightarrow \dots \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_0$

Từ việc phân tích trên, sơ đồ trạng thái sẽ như Hình 5-3.

Hình 5-3: Sơ đồ trạng thái của hệ thống thống từ chối cổ điển



Giải thích:

- Ở trạng thái X_0 dưới tác động của dòng vào cường độ λ hệ thống sẽ chuyển sang trạng thái X_1 .

- Ở trạng thái X_k ($k = \overline{1, n}$) hệ thống chịu tác động của hai dòng biến cố:

+ Dòng vào với cường độ λ làm cho hệ thống chuyển sang trạng thái X_{k+1}

+ Dòng phục vụ tại k kênh có năng suất $k\mu$ ($k = \overline{1, n}$) sẽ làm cho hệ thống chuyển về trạng thái X_{k-1} .

- Ở trạng thái X_n dưới tác động của dòng phục vụ tại n kênh với năng suất $n\mu$, hệ thống sẽ chuyển về trạng thái X_{n-1} .

Như vậy, quá trình thay đổi trạng thái của hệ thống là quá trình hủy và sinh do đó có thể sử dụng các biểu thức xác suất trạng thái của quá trình sinh và tử để tính toán:

$$p_k = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} p_0$$

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^n \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}}$$

Với hệ thống đang xét:

$$\begin{cases} \lambda_i = \lambda \quad \forall i = \overline{0, n-1} \\ \mu_{i+1} = (i+1)\mu \quad \forall i = \overline{0, n-1} \end{cases}$$

Vậy, thế vào công thức trên, kết quả như sau:

$$p_k = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda}{(i+1)\mu} p_0 = \frac{\lambda^k}{\mu^k k!} p_0$$

Đặt $\alpha = \lambda/\mu$ và kết quả sẽ là:

$$p_k = \frac{\alpha^k}{k!} p_0$$

Tiếp theo cần tính xác suất p_0 . Dựa vào công thức tính xác suất của quá trình sinh và tử, p_0 được tính như sau:

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^n \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}} = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha^k}{k!}}$$

Hay

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!}}$$

c. Hệ thống chỉ tiêu phân tích tình hình hoạt động

Xác suất không có yêu cầu (p_0)

Chỉ tiêu này cho biết khả năng để tất cả các kênh của hệ thống đều không làm việc, đồng thời còn cho biết tỷ lệ thời gian mọi kênh của hệ thống không làm việc so với toàn bộ thời gian hoạt động của hệ thống.

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!}}$$

Xác suất từ chối yêu cầu (p_{tc})

Chỉ tiêu này cho biết khả năng một yêu cầu đến hệ thống bị từ chối, đồng thời còn cho biết tỷ lệ số yêu cầu đến hệ thống bị từ chối so với toàn bộ số yêu cầu đến hệ thống.

Theo nguyên tắc hoạt động của hệ thống, một yêu cầu đến hệ thống gặp lúc mọi kênh bận thì bị từ chối. Chính vì vậy, khả năng hệ thống từ chối các yêu cầu cũng chính là khả năng hệ thống bận hoàn toàn, tức $p_{tc} = p_n$.

$$p_{tc} = \frac{\alpha^n}{n!} p_0$$

Xác suất phục vụ yêu cầu (p_v)

Chỉ tiêu này cho biết khả năng một yêu cầu đến hệ thống được nhận vào phục vụ, đồng thời còn cho biết tỷ lệ số yêu cầu đến hệ thống được phục vụ.

Theo nguyên tắc hoạt động của hệ thống, một yêu cầu đến hệ thống gặp lúc tồn tại ít nhất một kênh rỗi thì được nhận vào phục vụ. Chính vì vậy, xác suất phục vụ yêu cầu cũng chính xác suất hệ thống có ít nhất một kênh rỗi.

$$p_v = \sum_{k=0}^{n-1} p_k$$

Tuy nhiên, chúng ta có thể tính như sau:

$$p_v = 1 - p_{tc}$$

Số kênh bận trung bình (L_b)

Chỉ tiêu này cho biết trong hệ thống trung bình có bao nhiêu kênh làm việc.

Nó chính là kỳ vọng toán của số kênh bận.

$$L_b = \sum_{k=0}^n k p_k$$

Qua một số biến đổi, công thức tính sẽ như sau:

$$L_b = \alpha p_v$$

Số kênh rỗi trung bình (n_r)

Chỉ tiêu này cho biết trong hệ thống, trung bình có bao nhiêu kênh không làm việc.

$$n_r = n - L_b$$

Hệ số kênh bận (K_b)

Chỉ tiêu này cho biết tỷ lệ % số kênh của hệ thống được huy động để phục vụ các yêu cầu.

$$K_b = \frac{L_b}{n} \times 100$$

Hệ số kênh rỗi (K_r)

Chỉ tiêu này cho biết tỷ lệ % số kênh của hệ thống không được huy động để phục vụ các yêu cầu.

$$K_r = \frac{n_r}{n} \times 100$$

Năng lực phục vụ thực tế của hệ thống (Q)

Chỉ tiêu này cho biết trung bình trong một đơn vị thời gian, hệ thống phục vụ được bao nhiêu yêu cầu.

$$Q = \lambda p_v$$

Tổng chi phí và tổn thất (TC)

Chỉ tiêu này cho biết tổng phí tổn do phải chi phí cho hoạt động phục vụ của các kênh làm việc, lãng phí do các kênh không làm việc và tổn thất do các yêu cầu bị từ chối.

Tổng chi phí và tổn thất được tính theo công thức:

$$TC = T(L_b C_b + n_r C_r + \lambda p_{tc} C_{tc})$$

Trong đó: - T là tổng thời gian hoạt động của hệ thống,

- C_b là chi phí cho 1 kênh làm việc trong 1 đơn vị thời gian,

- C_r là chi phí cho 1 kênh không làm việc trong 1 đơn vị thời gian,

- C_{tc} là tổn thất do từ chối 1 yêu cầu trong 1 đơn vị thời gian.

Doanh thu (D)

Phản ảnh toàn bộ kết quả thu được do phục vụ các yêu cầu trong thời gian hoạt động và được tính theo công thức như sau:

$$D = T \lambda p_v d$$

Trong đó, d là doanh thu do phục vụ một yêu cầu trong một đơn vị thời gian.

Hiệu quả kinh tế (E)

Chỉ tiêu này cho biết trong thời gian hoạt động sau khi đã trừ chi phí và tổn thất, hệ thống còn thu được một lượng giá trị là bao nhiêu, công thức tính như sau:

$$E = D - TC$$

d. Ví dụ

Một trạm điện thoại tự động có khả năng phục vụ đồng thời 6 yêu cầu đàm thoại. Trung bình một cuộc đàm thoại mất 1,5 phút. Dòng yêu cầu đàm thoại đến trạm giả thiết là dòng tối giản có cường độ với 4 yêu cầu mỗi phút. Hãy đánh giá tình hình hoạt động của trạm.

Giải: Trạm điện thoại được xem như hệ thống từ chối cổ điển. Theo giả thiết, chúng ta có: số kênh $n=6$; cường độ dòng vào là $\lambda=4$ yêu cầu/phút; năng suất phục vụ là $\mu=1/w_b=1/1,5$ yêu cầu/phút. Như vậy, $\alpha=\lambda/\mu=6$.

Dựa vào các đại lượng này, chúng ta tính toán một số chỉ tiêu phản ánh tình hình hoạt động của trạm điện thoại như sau:

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!}} = \frac{1}{\sum_{k=0}^6 \frac{6^k}{k!}} = \frac{1}{244,6} = 0,0041$$

$$p_{tc} = \frac{\alpha^n}{n!} p_0 = \frac{6^6}{6!} 0,0041 = 0,265$$

$$p_v = 1 - p_{tc} = 1 - 0,265 = 0,735$$

$$L_b = \alpha p_v = 6 \times 0,735 = 4,41$$

$$n_r = n - L_b = 6 - 4,41 = 1,59$$

$$K_b = L_b / n = 4,41 / 6 = 0,735 \text{ hay } 73,5\%$$

$$K_r = 100 - K_b = 26,5\%$$

5.5.2. Hệ thống chờ thuần nhất (hệ thống chờ với độ dài hàng chờ và thời gian chờ không hạn chế) (M/M/n)

a. Bài toán

Một hệ thống có n kênh phục vụ, năng suất như nhau và bằng μ . Dòng yêu cầu đến hệ thống là dòng tối giản với cường độ λ . Thời gian phục vụ của các

kênh tuân theo qui luật hàm số mũ với tham số μ . Hệ thống phục vụ theo nguyên tắc: một yêu cầu đến hệ thống nếu gặp lúc trong hệ thống có ít nhất một kênh rỗi thì được nhận vào phục vụ, ngược lại nếu mọi kênh đều bận thì phải xếp hàng chờ cho đến khi có ít nhất 1 kênh được giải phóng thì được nhận vào phục vụ (thời gian chờ và độ dài hàng chờ không hạn chế). Hãy xây dựng hệ thống chỉ tiêu phân tích, đánh giá tình hình hoạt động của hệ thống.

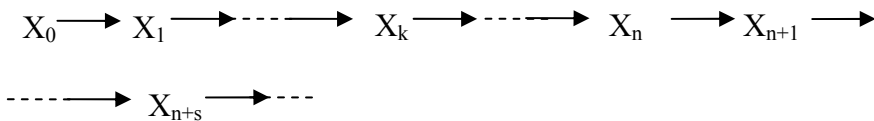
b. Sơ đồ trạng thái và các xác suất trạng thái

Theo giả thiết bài toán, ta thấy hệ thống có các trạng thái sau:

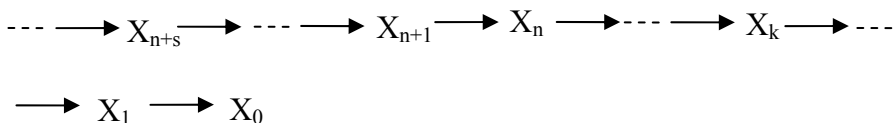
X_k ($k = \overline{0, n}$) là trạng thái hệ thống có k yêu cầu (cũng chính là trạng thái có k kênh bận).

X_{n+s} ($s=1,2,\dots$) là trạng thái trong hệ thống có n yêu cầu đang được phục vụ và s yêu cầu chờ.

Theo nguyên tắc hoạt động của hệ thống, dưới tác động của dòng vào cường độ λ thì các trạng thái của hệ thống thay đổi trạng thái theo hướng

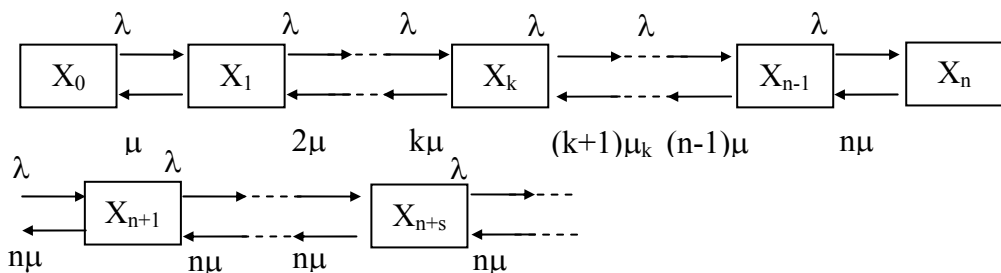


Ngược lại, dưới tác động của dòng phục vụ tại k kênh năng suất μ ($k = \overline{1, n}$) thì các trạng thái của hệ thống thay đổi trạng thái theo hướng:



Từ việc phân tích trên, chúng ta có sơ đồ trạng thái như trên Hình 5-4.

Hình 5-4: Sơ đồ trạng thái của hệ thống thống chờ thuần nhất



Giải thích:

- Ở trạng thái X_0 dưới tác động của dòng vào cường độ λ hệ thống sẽ chuyển sang trạng thái X_1 .

- Ở trạng thái X_k ($k = \overline{1, n}$), hệ thống chịu tác động của hai dòng biến cố:
 - + Dòng vào cường độ λ làm cho hệ thống chuyển sang trạng thái X_{k+1}
 - + Dòng phục vụ tại k kênh với năng suất μ sẽ làm cho hệ thống chuyển về trạng thái X_{k-1} .
- Ở trạng thái X_{n+s} , hệ thống chịu tác động của hai dòng biến cố:
 - + Dòng vào cường độ λ làm cho hệ thống chuyển sang trạng thái X_{n+s+1} .
 - + Dòng phục vụ tại n kênh với năng suất μ làm cho hệ thống sẽ chuyển về trạng thái X_{n+s-1}

Như vậy, quá trình thay đổi trạng thái của hệ thống là quá trình sinh và tử do đó có thể sử dụng các biểu thức xác suất trạng thái của quá trình sinh và tử để tính toán:

$$p_k = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} p_0$$

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^n \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}}$$

Với sơ đồ trạng thái đang xét, chúng ta có:

$$\lambda_i = \lambda \quad \forall i = 0, 1, \dots$$

$$\mu_{i+1} = \begin{cases} (i+1)\mu & \forall i = \overline{0, n-1} \\ n\mu & \forall i = n, n+1, \dots \end{cases}$$

Điều này có nghĩa qui tắc tính xác suất của các trạng thái từ X_0 đến X_n khác biệt so với các trạng thái từ X_{n+1} về sau. Vậy, công thức tương ứng như sau:

$$p_k = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda}{(i+1)\mu} p_0 = \frac{\alpha^k}{k!} p_0 \quad \text{với } \alpha = \lambda/\mu \quad k = \overline{1, n}$$

$$p_k = \frac{\alpha^k}{k!} p_0$$

p_{n+s} với $s=0, 1, \dots$ được tính như sau:

$$p_{n+s} = \prod_{i=0}^{n+s-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} p_0 = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} \prod_{i=n}^{n+s-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} p_0 = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda}{(i+1)\mu} \prod_{i=n}^{n+s-1} \frac{\lambda}{n\mu} p_0 = \frac{\alpha^n}{n!} \times \frac{\alpha^s}{n^s} p_0$$

$$p_{n+s} = \frac{\alpha^{n+s}}{n! n^s} p_0 \quad \forall s = 1, 2, \dots$$

Để tính p_{n+s} cần tính xác suất p_0 . Dựa vào công thức tính xác suất của quá trình sinh và tử, p_0 được tính như sau:

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}} = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^n \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}} = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{n}\right)^s}$$

Với $\alpha/n \geq 1$, mẫu số $\rightarrow \infty$, nên $p_0 = 0$

Với $\alpha/n < 1$, thì:

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)}} \quad \left(\frac{\alpha}{n} < 1 \right)$$

c. Các chỉ tiêu đánh giá tình hình hoạt động của hệ thống

Xác suất không có yêu cầu (p_0)

Chỉ tiêu này cho biết khả năng để mọi kênh của hệ thống đều không làm việc, đồng thời nó còn cho biết tỷ lệ thời gian tất cả các kênh của hệ thống không làm việc so với toàn bộ thời gian hoạt động của hệ thống.

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)}}$$

Xác suất chờ của yêu cầu (p_q)

Chỉ tiêu này cho biết khả năng một yêu cầu đến hệ thống phải chờ, đồng thời cho biết tỷ lệ số yêu cầu đến hệ thống phải chờ so với toàn bộ số yêu cầu đến hệ thống.

$$p_q = \sum_{s=0}^{\infty} p_{n+s} = \frac{\alpha^n}{n!(1 - \frac{\alpha}{n})} p_0$$

Số yêu cầu chờ trung bình (L_q)

Chỉ tiêu này cho biết trong hệ thống trung bình có bao nhiêu yêu cầu phải chờ.

$$L_q = \frac{\alpha}{(n-\alpha)} p_q$$

Thời gian chờ trung bình (W_q)

Chỉ tiêu này cho biết thời gian chờ trung bình của một yêu cầu đến hệ thống.

$$w_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

Số kênh bận trung bình (L_b)

Chỉ tiêu này cho biết trong hệ thống trung bình có bao nhiêu kênh làm việc.

$$L_b = \alpha n_v = \alpha$$

Vì đối với hệ thống chờ thuần nhất thì $p_v = 1$

Số kênh rỗi trung bình (n_r)

Chỉ tiêu này cho biết trong hệ thống, trung bình có bao nhiêu kênh rỗi.

$$n_r = n - L_b$$

Hệ số kênh bận (K_b)

Chỉ tiêu này cho biết tỷ lệ % số kênh của hệ thống được huy động để phục vụ các yêu cầu.

$$K_b = \frac{L_b}{n} \times 100 = \frac{\alpha}{n} \times 100$$

Hệ số kênh rỗi (K_r)

Chỉ tiêu này cho biết tỷ lệ % số kênh của hệ thống không được huy động để phục vụ các yêu cầu.

$$K_r = \frac{n_r}{n} \times 100 = \frac{n - \alpha}{n} \times 100$$

Năng lực phục vụ thực tế của hệ thống (Q)

Chỉ tiêu này cho biết trung bình trong một đơn vị thời gian, hệ thống phục vụ được bao nhiêu yêu cầu.

$$Q = \lambda p_v = \lambda$$

Vì: trong hệ thống chờ thuần nhất $p_v = 1$

Tổng chi phí và tổn thất (TC)

Chỉ tiêu này cho biết tổng phí tổn do phải chi phí cho hoạt động phục vụ của các kênh bận, lãng phí do các kênh rỗi và tổn thất do các yêu cầu chờ.

$$TC = T(L_b C_b + n_r C_r + L_q C_q)$$

Trong đó:

- T là tổng thời gian hoạt động của hệ thống;
- C_b là chi phí bình quân cho 1 kênh bận trong 1 đơn vị thời gian;
- C_r là chi phí bình quân cho 1 kênh rỗi trong 1 đơn vị thời gian;
- C_q là tổn thất bình quân do một yêu cầu chờ trong một đơn vị thời gian.

Doanh thu (D)

Phản ảnh toàn bộ kết quả thu được do phục vụ các yêu cầu.

$$D = T\lambda p_v d = T\lambda d$$

Hiệu quả kinh tế (E)

Chỉ tiêu này cho biết toàn bộ kết quả cuối cùng của hệ thống trong thời gian hoạt động.

$$E = D - TC$$

d. Ví dụ

Một bến cảng có 5 cầu xếp dỡ hàng hoá. Dòng các tàu đến cảng là dòng tối giản, trung bình trong một tháng có 20 tàu cập cảng. Thời gian bốc dỡ xong một tàu tại mỗi cầu tàu là đại lượng ngẫu nhiên và trung bình mỗi tàu mất 6 ngày. Cho biết thêm:

- Chi phí bình quân cho 1 cầu xếp dỡ làm việc là 1 triệu đồng/tháng.
- Nếu 1 cầu xếp dỡ không làm việc trong 1 tháng thì cảng sẽ thiệt hại 1 triệu đồng.
- Chi phí cho bình quân một tàu chờ 1 triệu đồng/tháng.

Hãy đánh giá tình hình phục vụ của cảng và cho biết nên tăng số cầu bốc dỡ của cảng lên bao nhiêu để tổng chi phí và tổn thất của bến cảng là nhỏ nhất.

✎ Giải: Bến cảng được xem là một hệ thống chờ thuần nhất với số kênh $n=5$, cường độ dòng vào $\lambda=20$ tàu/tháng và thời gian phục vụ $W_b=6$ ngày/tàu hay năng suất phục vụ là $\mu=30/6=5$ tàu/tháng. Vậy: $\alpha=\lambda/\mu=20/5=4$

Kiểm tra điều kiện: $\alpha/n=4/5<1$ thỏa mãn điều kiện của bài toán. Như vậy có thể sử dụng những công thức trên cho hệ thống này.

Các chỉ tiêu đánh giá tình hình phục vụ của bến cảng:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)}} = \frac{1}{\sum_{k=0}^5 \frac{4^k}{k!} + \frac{4^{5+1}}{5!(5-4)}} = 0,013$$

$$P_q = \frac{\alpha^n}{n! \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)} P_0 = \frac{4^5}{5! \left(1 - \frac{4}{5}\right)} \times 0,013 = 0,555$$

Trung bình có trên 55% số tàu đến cảng phải chờ

$$L_q = \frac{\alpha}{n-\alpha} \times P_q = \frac{4}{5-4} \times 0,555 = 2,216$$

Trung bình có 2,216 tàu phải chờ ở cảng

$$W_q = L_q / \lambda = 2,216 / 20 = 0,1108 \text{ tháng} (\approx 3,3 \text{ ngày})$$

Trung bình mỗi tàu chờ, phải chờ trên 3 ngày

$$L_b = \alpha = 4$$

$$K_b = L_b / n = 4 / 5 = 0,8 \text{ hay } 80\%$$

$$n_r = n - \alpha = 5 - 4 = 1$$

$$K_r = n_r / n = 1 / 5 = 0,2 \text{ hay } 20\%$$

Trung bình, trong cảng có 4 cầu tàu được huy động vào bốc dỡ hàng chiếm 80% và có 1 cầu chưa được huy động chiếm 20%.

$$\begin{aligned} TC &= T(L_b C_b + n_r C_r + L_q C_q) \\ &= (4 \times 1 + 1 \times 1 + 2,216 \times 1) = 7,216 \text{ (triệu đồng)} \end{aligned}$$

Trung bình mỗi tháng cảng phải chi phí 7,216 triệu đồng.

Kết luận: Bến cảng hoạt động chưa được tốt.

Nghiên cứu phương án tăng thêm số cầu xếp dỡ hàng hoá:

Để xác định nên tăng số cầu xếp dỡ lên bao nhiêu để chi phí và tổn thất của bến cảng là nhỏ nhất, thì chúng ta đi tính các chỉ tiêu TC tương ứng với số cầu bốc dỡ $n=5,6,7,8,9$... Theo đề bài, $T=1$ tháng, $C_q=1$ triệu đồng/tháng, $C_b=1$ triệu/tháng, $C_r=1$ triệu/tháng. Kết quả được trình bày trên Bảng 5-3.

Bảng 5-3: Kết quả tính toán

Chỉ tiêu \ n	5	6	7	8
P_q	0,556	0,28	0,13	0,05
L_q	2,21	0,56	0,17	0,05
W_q	3,30	0,84	0,24	0,075
K_r	0,20	0,33	0,42	0,5
TC	7,20	6,56	7,17	8,05

Vậy, phương án $n=6$ được chọn vì chi phí nhỏ nhất hay nói cách khác cần tăng thêm một cầu tàu nữa để giảm chi phí.

5.5.3. Hệ thống chờ với độ dài hàng chờ hạn chế (M/M/n/n+m)

a. Bài toán

Một hệ thống có n kênh phục vụ, năng suất như nhau và bằng μ , thời gian phục vụ của các kênh tuân theo qui luật hàm số mũ với tham số μ . Dòng yêu cầu đến hệ thống là dòng tối giản với cường độ λ . Hệ thống phục vụ theo

nguyên tắc: một yêu cầu đến hệ thống nếu gặp lúc trong hệ thống có ít nhất 1 kênh rỗi thì được nhận vào phục vụ, ngược lại nếu gặp lúc mọi kênh đều bận thì sẽ xảy ra 2 trường hợp: nếu trong hệ thống số yêu cầu chờ còn ít hơn số yêu cầu chờ cho phép (m) thì yêu cầu đó được xếp hàng chờ; nếu trong hệ thống, số yêu cầu chờ đã đủ (bằng m) thì yêu cầu đó bị từ chối.

Hãy xây dựng hệ thống chỉ tiêu đánh giá tình hình hoạt động của hệ thống.

b. Sơ đồ trạng thái và các xác suất trạng thái

Theo giả thiết bài toán, chúng ta thấy hệ thống có các trạng thái sau:

X_k ($k = \overline{0, n}$) là trạng thái hệ thống có k yêu cầu (cũng chính là trạng thái có k kênh bận);

X_{n+s} ($s = \overline{0, m}$) là trạng thái trong hệ thống có n yêu cầu đang được phục vụ và s yêu cầu chờ.

Theo nguyên tắc hoạt động của hệ thống, dưới tác động của dòng vào cường độ λ thì các trạng thái của hệ thống thay đổi trạng thái theo hướng:

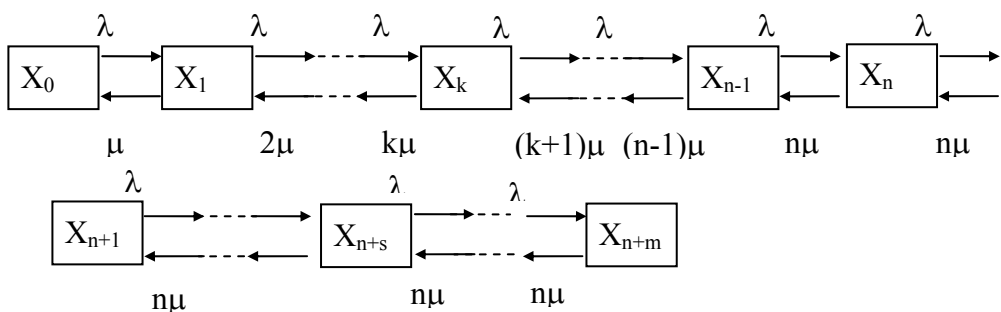
$$X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow \dots \rightarrow X_k \rightarrow \dots \rightarrow X_n \rightarrow X_{n+1} \rightarrow \dots \rightarrow X_{n+s} \rightarrow \dots \rightarrow X_{n+m}$$

Ngược lại, dưới tác động của dòng phục vụ tại k kênh năng suất $k\mu$ ($k=1 \dots n$) thì các trạng thái của hệ thống thay đổi trạng thái theo hướng

$$X_{n+m} \leftarrow \dots \leftarrow X_{n+s} \leftarrow \dots \leftarrow X_{n+1} \leftarrow X_n \leftarrow \dots \leftarrow X_k \leftarrow \dots \leftarrow X_1 \leftarrow X_0$$

Từ việc phân tích trên, sơ đồ trạng thái sẽ là:

Hình 5-5: Sơ đồ trạng thái của hệ thống chờ hạn chế



Giải thích:

- Ở trạng thái X_0 dưới tác động của dòng vào cường độ λ hệ thống sẽ chuyển sang trạng thái X_1 .

- Ở trạng thái X_k ($k = \overline{1, n}$), hệ thống chịu tác động của hai dòng biến cố:

- + Dòng vào với cường độ λ làm cho hệ thống chuyển sang trạng thái X_{k+1}
- + Dòng phục vụ tại k kênh với năng suất μ sẽ làm cho hệ thống chuyển về trạng thái X_{k-1} .
- Ở trạng thái X_{n+s} (mọi s từ 1 đến $m-1$), hệ thống chịu tác động của hai dòng biến cố:
 - + Dòng vào với cường độ λ làm cho hệ thống chuyển sang trạng thái X_{n+s+1} .
 - + Dòng phục vụ tại n kênh với năng suất $n\mu$ sẽ làm cho hệ thống chuyển về trạng thái X_{n+s-1} .
- Ở trạng thái X_{n+m} dưới tác động của dòng phục vụ tại n kênh với năng suất $n\mu$ hệ thống sẽ chuyển về trạng thái X_{n+m-1} .

Như vậy, quá trình thay đổi trạng thái của hệ thống là quá trình hủy và sinh, do đó chúng ta có thể sử dụng các công thức tính xác suất trạng thái của quá trình hủy và sinh để tính toán:

$$p_k = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} p_0$$

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^n \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}}$$

Với hệ thống đang xét, chúng ta có:

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \lambda \quad \forall i = \overline{0, n+m-1} \\ \mu_{i+1} &= \begin{cases} (i+1)\mu & \forall i = \overline{0, n-1} \\ n\mu & \forall i = \overline{n, n+m-1} \end{cases} \end{aligned}$$

Qua một số bước biến đổi tương tự như trong các hệ thống trên, kết quả sẽ như sau:

$$p_k = \frac{\alpha^k}{k!} p_0 \quad \forall k = \overline{1, n} \text{ với } \alpha = \lambda/\mu$$

$$p_{n+s} = \frac{\alpha^{n+s}}{n! n^s} p_0 \quad \forall s = \overline{1, m}$$

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{s=1}^m \left(\frac{\alpha}{n}\right)^s}$$

c. Các chỉ tiêu đánh giá tình hình hoạt động của hệ thống

Xác suất không có yêu cầu (p_0)

Chỉ tiêu này cho biết tại một thời điểm nào đó, khả năng để tất cả các kênh của hệ thống đều rỗi, đồng thời nó còn cho biết tỷ lệ thời gian tất cả các kênh của hệ thống rỗi so với toàn bộ thời gian hoạt động của hệ thống.

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{s=1}^m \left(\frac{\alpha}{n}\right)^s}$$

Xác suất từ chối yêu cầu (p_{tc})

Chỉ tiêu này cho biết khả năng một yêu cầu đến hệ thống bị từ chối, đồng thời còn cho biết tỷ lệ số yêu cầu đến hệ thống bị từ chối so với toàn bộ số yêu cầu đến hệ thống.

$$p_{tc} = \frac{\alpha^{n+m}}{n!n^m} p_0$$

Xác suất phục vụ yêu cầu (p_v)

Chỉ tiêu này cho biết khả năng một yêu cầu đến hệ thống được nhận vào phục vụ, đồng thời còn cho biết tỷ lệ số yêu cầu đến hệ thống được phục vụ.

$$p_v = 1 - p_{tc}$$

Xác suất chờ của yêu cầu (p_q)

Chỉ tiêu này cho biết một yêu cầu đến hệ thống phải chờ, đồng thời cho biết tỷ lệ số yêu cầu đến hệ thống phải chờ so với toàn bộ số yêu cầu đến hệ thống.

$$p_q = \sum_{s=0}^{m-1} p_{n+s} = p_0 \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{s=0}^{m-1} \left(\frac{\alpha}{n}\right)^s$$

Số yêu cầu chờ trung bình (L_q)

Chỉ tiêu này cho biết trong hệ thống trung bình có bao nhiêu yêu cầu phải chờ.

$$L_q = \sum_{s=1}^m s p_{n+s} = p_0 \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{s=1}^m s \left(\frac{\alpha}{n}\right)^s$$

Số kênh bận trung bình (L_b)

Chỉ tiêu này cho biết trong hệ thống trung bình có bao nhiêu kênh làm việc.

$$L_b = \alpha p_v$$

Số kênh rỗi trung bình (n_r)

Chỉ tiêu này cho biết trong hệ thống trung bình có bao nhiêu kênh rỗi.

$$n_r = n - L_b$$

Số yêu cầu lưu lại trung bình trong hệ thống (L)

Chỉ tiêu này cho biết trung bình có bao nhiêu yêu cầu lưu lại trong hệ thống.

$$L = L_q + L_b$$

Thời gian chờ trung bình (W_q)

Chỉ tiêu này cho biết trung bình một yêu cầu đến hệ thống phải chờ với thời gian bao nhiêu.

$$W_q = L_q / \lambda$$

Thời gian yêu cầu lưu lại trung bình trong hệ thống (W)

Chỉ tiêu này cho biết một yêu cầu lưu lại trong hệ thống trung bình mất bao nhiêu thời gian, bao gồm thời gian chờ và thời gian phục vụ trung bình.

$$W = W_q + W_b$$

Hệ số kênh bận (K_b)

Chỉ tiêu này cho biết tỷ lệ % số kênh của hệ thống được huy động để phục vụ.

$$K_b = \frac{L_b}{n} \times 100$$

Hệ số kênh rỗi (K_r)

Chỉ tiêu này cho biết tỷ lệ % số kênh của hệ thống không được huy động để phục vụ các yêu cầu.

$$K_r = \frac{n_r}{n} \times 100$$

Năng lực phục vụ thực tế của hệ thống (Q)

Chỉ tiêu này cho biết trung bình trong một đơn vị thời gian hệ thống phục vụ được bao nhiêu yêu cầu.

$$Q = \lambda p_v$$

Tổng chi phí và tổn thất (TC)

Chỉ tiêu này cho biết tổng phí tổn do phải chi phí cho hoạt động phục vụ của các kênh làm việc, lãng phí do các kênh không làm việc và tổn thất do các yêu cầu chờ và do từ chối các yêu cầu.

$$TC = T(L_b C_b + n_r C_r + L_q C_q + \lambda p_{tc} C_{tc})$$

Doanh thu (D)

Phản ánh toàn bộ kết quả thu được do phục vụ các yêu cầu.

$$D = T\lambda p_v d$$

Với d là doanh thu được do phục vụ một yêu cầu trong một đơn vị thời gian.

Hiệu quả kinh tế (E)

Chỉ tiêu này cho biết toàn bộ kết quả cuối cùng của hệ thống trong thời gian hoạt động.

$$E = D - TC$$

d. Ví dụ

Một trạm sửa chữa máy nông nghiệp có một căn nhà chứa được một máy đang sửa chữa và một sân có diện tích chứa được 3 máy chờ. Biết rằng trạm sửa chữa xong một máy trung bình mất 2 ngày ($w_b=2$ ngày) và trung bình 2 ngày có một máy đến trạm sửa chữa ($\lambda=0,5$ máy/ngày). Nguyên tắc phục vụ của trạm là nguyên tắc phục vụ của hệ thống chờ với độ dài hàng chờ hạn chế.

Yêu cầu:

- Hãy đánh giá tình hình phục vụ của trạm;
- Giả sử tăng thêm 1 dây chuyền sửa chữa nữa thì tình hình phục vụ của trạm như thế nào. Biết rằng năng suất phục vụ và cường độ dòng vào không đổi.

♣ Giải: Theo giả thiết bài toán, các tham số của hệ thống sẽ là: $n=1$; $m=3$; $\mu=0,5$ máy/ngày; $\lambda=0,5$ máy/ngày. Vậy $\alpha=\lambda/\mu=1$.

Để đánh giá tình hình hoạt động của trạm, cần tính các chỉ tiêu như sau:

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{s=1}^m \left(\frac{\alpha}{n}\right)^s} = \frac{1}{\sum_{k=0}^1 \frac{1^k}{k!} + \frac{1^1}{1!} \sum_{s=1}^3 \left(\frac{1}{1}\right)^s} = 0,2$$

Có khoảng 20% thời gian trạm không làm việc.

$$p_{tc} = p_{n+m} = \frac{\alpha^{n+m}}{n!.n^m} \times p_0 = \frac{1^4}{1!.1^3} \times 0,2 = 0,2$$

$$p_v = 1 - p_{tc} = 1 - 0,2 = 0,8$$

Như vậy, trung bình 10 máy đến trạm có 2 máy bị từ chối và 8 máy được nhận vào phục vụ.

$$p_q = \sum_{s=0}^{m-1} p_{n+s} = 0,2 \frac{1^1}{1!} \sum_{s=0}^2 \left(\frac{1}{1}\right)^s = 0,6$$

Bình quân 10 máy đến trạm thì có 6 máy phải chờ hay nói khác có 60% số máy đến trạm phải chờ.

$$L_q = \sum_{s=1}^m s p_{n+s} = p_0 \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{s=1}^m s \left(\frac{\alpha}{n}\right)^s = 0,2 \frac{1^1}{1!} \sum_{s=1}^3 s \left(\frac{1}{1}\right)^s = 1,2$$

Bình quân trong trạm có 1,2 máy phải chờ để được phục vụ

$$L=L_q+L_b=1,2+0,8=2$$

Trong trạm, bình quân có 2 máy gồm 1,2 máy đang chờ và 0,8 máy đang được phục vụ.

$$W_q=L_q/\lambda=1,2/0,5=2,4 \text{ ngày}$$

Thời gian chờ của máy ở trạm trung bình 2,4 ngày.

$$W=W_b+W_q=4,4 \text{ ngày}$$

$$Q=\lambda p_v=0,5 \times 0,8=0,4 \text{ máy}$$

Trung bình có 0,4 máy được sửa chữa trong ngày.

Kết luận: Nếu tăng thêm 1 dây chuyền sửa chữa nữa ($n=2$), kết quả tính toán được trình bày trên Bảng 5-4.

Bảng 5-4: Kết quả tính các chỉ tiêu

N	P_0	P_{tc}	P_v	P_q	L_q	L	W_q	Q
1	0,20	0,20	0,80	0,60	1,20	2,0	2,4	0,40
2	0,34	0,02	0,98	0,28	0,23	1,2	0,46	0,49

Như vậy, nếu tăng thêm một dây chuyền sửa chữa nữa thì trạm sẽ phục vụ tốt hơn so với một dây chuyền ban đầu. Cụ thể xác suất từ chối, xác suất chờ, số máy chờ trung bình, thời gian chờ trung bình giảm xuống, xác suất phục vụ và năng lực phục thực tế của trạm tăng lên.

Câu hỏi ôn tập

1. Thế nào là mô hình hàng chờ? Nêu đường lối chung để giải quyết.
2. Nêu những thành cơ bản của hệ thống hàng chờ.
3. Nêu các điều kiện cơ bản để giải bài toán hàng chờ.
5. Trình bày phương pháp kiểm định dòng vào tuân theo phân phối Poisson.
6. Nêu qui tắc thiết lập hệ phương trình trạng thái.
7. Nêu quá trình sinh và tử.
8. Nêu đặc trưng và hệ thống chỉ tiêu đo lường tình hình hoạt động của hệ thống từ chối cố điển.
9. Nêu đặc trưng và hệ thống chỉ tiêu đo lường tình hình hoạt động của hệ thống từ chờ thuần nhất.
10. Nêu đặc trưng và hệ thống chỉ tiêu đo lường tình hình hoạt động của hệ thống chờ hạn chế.

Bài tập

5.1. Người ta quan sát thấy rằng dòng khách đến một siêu thị là dòng tối giản với cường độ trung bình $\lambda=4$ khách/phút.

- Tính xác suất để trong một phút có 3 khách đến siêu thị;
- Tính xác suất để trong một phút có khoảng từ 2 đến 4 khách đến siêu thị;
- Tính xác suất để trong hai phút có 5 khách đến siêu thị.

5.2. Người ta tiến hành quan sát số hành khách đến cửa hàng trong 5 giờ liên tục theo từng khoảng thời gian nhỏ 3 phút và số liệu như sau:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
n_i	0	5	11	13	22	18	14	9	4	2	1	1

Trong đó:

x_i : Số khách đến cửa hàng trong từng khoảng thời gian nhỏ 3 phút.

n_i : Số khoảng thời gian có số khách hàng tương ứng.

Hãy kiểm định dòng khách hàng đến cửa hàng có tuân theo phân phối Poisson hay không?

5.3. Người ta tiến hành quan sát số hành khách đến cửa hàng trong 4 giờ liên tục theo từng khoảng thời gian nhỏ 3 phút và số liệu như sau:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
n_i	0	4	5	10	18	17	7	7	5	4	1	2

Với: x_i là số khách đến cửa hàng trong từng khoảng thời gian nhỏ 3 phút.

n_i : Số khoảng thời gian có số khách hàng tương ứng.

Hãy kiểm định dòng khách hàng đến cửa hàng có tuân theo phân phối Poisson hay không?

5.4. Một trạm điện thoại tự động có khả năng phục vụ đồng thời 6 yêu cầu đàm thoại. Trung bình một cuộc đàm thoại mất 1,5 phút. Dòng yêu cầu đàm thoại đến trạm giả thiết là dòng tối giản có cường độ 4 yêu cầu/phút. Hãy đánh giá tình hình hoạt động của cửa trạm.

5.5. Hệ thống phục vụ có 3 kênh năng suất như nhau và trung bình trong 1 giờ mỗi kênh phục vụ được 1 yêu cầu. Dòng vào là dòng tối giản có cường độ 2 yêu cầu/giờ. Một yêu cầu đến gặp lúc hệ thống có ít nhất 1 kênh rồi thì được nhận vào phục vụ tại 1 kênh rồi bất kì và phục vụ cho đến cùng. Nếu gặp lúc cả 3 kênh đều bận thì yêu cầu bị từ chối. (Biết thêm: chi phí cho 1 kênh là 6500 đồng/giờ và doanh thu phục vụ mỗi yêu cầu là 20000 đồng). Mỗi ngày hệ thống làm việc 8 giờ.

- a. Vẽ sơ đồ trạng thái của hệ thống;
- b. Tính xác suất một yêu cầu đến hệ thống được phục vụ;
- c. Tính lợi nhuận bình quân trong một ngày;
- d. Có nên tăng thêm một kênh phục vụ nữa không.

5.6. Một trạm rửa xe có 2 dây chuyền rửa xe với năng suất mỗi dây chuyền là 4 xe/giờ. Dòng xe đến trạm là dòng tối giản với cường độ 8 xe/giờ. Trạm có đủ chỗ cho 5 xe chờ. Doanh thu mỗi xe 7ngàn/chiếc. Chi phí cho một dây chuyền rửa xe trong một giờ là 10 ngàn đồng. Chi phí cho một dây chuyền không làm việc là 2,5 ngàn đồng.

- a. Tính xác suất để một xe đến trạm được phục vụ.
- b. Tính độ dài hàng chờ và thời gian chờ trung bình.
- c. Trong một ngày làm việc 8 giờ thì có bao nhiêu thời gian trạm rỗi ? Tính lợi nhuận của trạm trong 1 ngày.

5.7. Một trạm sửa chữa máy nông nghiệp có khả năng 1 lúc chỉ sửa được một máy và có 1 diện tích có thể chứa tối đa 3 máy chờ để sửa. Trung bình 2 ngày có 1 máy đưa đến trạm và mỗi máy sửa xong hết 2 ngày. Nguyên tắc phục vụ của trạm là nguyên tắc phục vụ của hệ thống chờ với độ dài hàng chờ hạn chế.

- a. Hãy vẽ sơ đồ trạng thái của hệ thống;
- b. Hãy đánh giá tình hình hoạt động của hệ thống;
- c. Nếu tăng thêm 1 tổ sửa chữa nữa thì tình hình phục vụ của trạm như thế nào? Nếu biết năng suất phục vụ của trạm và cường độ dòng vào vẫn như cũ.

5.8. Các sản phẩm của nhà máy sau khi sản xuất được chuyển đến bộ phận kiểm tra chất lượng bằng các dây chuyền tự động với cường độ trung bình $\lambda=2$ sản phẩm/phút. Tại đây các sản phẩm được các máy kiểm tra. Cho biết có hai loại máy có thể sử dụng: loại thứ nhất có năng suất 4 sản phẩm/phút, giá mỗi máy 10 triệu đồng; loại thứ hai có năng suất 3 sản phẩm/phút, giá mỗi máy 8 triệu đồng. Cho biết thêm: chỉ được chọn một loại. Hãy xác định xem nên bố trí ở bộ phận kiểm tra bao nhiêu máy ? Loại nào? để đảm bảo trên 95% sản phẩm được kiểm tra và chi phí mua máy là nhỏ nhất.

5.9. Một loại chi tiết sau khi nhiệt luyện được chuyển tới phân xưởng rèn để gia công tiếp. Để giảm tỉ lệ sản phẩm hỏng, người ta trang bị một thiết bị giữ nhiệt. Thiết bị này có khả năng giữ được tối đa 3 chi tiết. Thời gian rèn xong 1 chi tiết trung bình mất 10 phút. Dòng chi tiết đến phân xưởng rèn là dòng tối giản có cường độ $\lambda=6$ chi tiết/giờ.

- a. Tính tỉ lệ chi tiết đến phân xưởng rèn không được gia công tiếp (bị từ chối) và thời gian chờ trung bình của 1 chi tiết.

b. Phải cải tiến thiết bị giữ nhiệt có khả năng giữ được bao nhiêu chi tiết để đảm bảo tỉ lệ chi tiết đến phân xưởng được gia công đạt 90%.

5.10. Tại kho của một công ty chỉ đủ cho 1 xe vào bốc dỡ hàng. Dòng xe đến kho là dòng tối giản với cường độ $\lambda = 4$ xe/ngày. Công ty có đội bốc dỡ gồm 3 công nhân, mỗi ngày bình quân bốc dỡ xong 5 xe. Chi phí cho mỗi xe chờ và lái xe mỗi ngày 40 ngàn đồng và chi cho mỗi công nhân bốc dỡ 32 ngàn đồng/ngày. Công ty có nên tăng thêm số công nhân trong đội hay không, nếu mỗi công nhân tăng thêm thì mức bốc dỡ sẽ tăng thêm bình quân 1 xe/ngày.

5.11. Một hệ thống phục vụ có 3 kênh, năng suất các kênh như nhau và bằng 2 yêu cầu/giờ. Dòng vào là dòng tối giản có cường độ 5 yêu cầu/giờ. Một yêu cầu đến hệ thống gặp lúc hệ thống có ít nhất 1 kênh rỗi thì được nhận vào tại một kênh rỗi bất kỳ. Nếu gặp lúc cả 3 kênh đều bận thì bị từ chối.

a. Tính xác suất một yêu cầu đến hệ thống được phục vụ;

b. Có nên tăng thêm một kênh phục vụ nữa không? (Biết chi phí cho mỗi kênh là 3000đ/giờ và khi phục vụ một yêu cầu hệ thống sẽ thu được 4000đ).

5.12. Tại một sân bay có một cửa hàng bán bánh. Thời gian phục vụ khách hàng tuân theo qui luật hàm mũ và bình quân mỗi phút phục vụ một khách hàng. Mỗi giờ bình quân có 45 khách đến. Trong cửa hàng số người chờ mua hàng không bao giờ quá 5 người, bởi vì lịch trình bay không cho phép khách hàng chờ lâu. Bình quân một khách hàng chi mua hàng 30 ngàn đồng.

a. Theo anh chị mỗi giờ, cửa hàng thất thu về doanh thu là bao nhiêu?

b. Nếu rút ngắn thời gian phục còn một nửa thì cửa hàng tăng thêm một khoảng doanh thu là bao nhiêu?

5.13. Cửa hàng bảo hành xe máy Honda có 5 công nhân phục vụ và 1 diện tích để 10 xe chờ. Dòng xe có nhu cầu bảo hành giả thiết là dòng tối giản với trung bình 4 xe/giờ. Thời gian trung bình bảo trì xong 1 xe của 1 công nhân mất 1 giờ, mỗi công nhân bảo trì 1 xe.

a. Tính số công nhân bận trung bình;

b. Tính số xe chờ trung bình và thời gian chờ trung bình.

5.14. Một công ty thương mại dự định mở một cửa hàng dịch vụ tổng hợp. Với giả thiết trung bình 1 giờ có 30 khách hàng đến mua hàng và mỗi nhân viên mỗi giờ phục vụ được 15 khách hàng. Cửa hàng phục vụ như một hệ thống chờ thuần nhất.

a. Tính toán một số chỉ tiêu đánh giá tình hình hoạt động của công ty;

b. Hãy xác định xem công ty cần bố trí bao nhiêu nhân viên bán hàng để đảm bảo tỷ lệ khách hàng phải chờ không vượt quá 10%.