

CHƯƠNG 3

MÔ HÌNH MẠNG

Mục tiêu chương

Sau khi hoàn thành chương này, sinh viên có thể:

1. Nắm được những khái niệm cơ bản của mạng;
2. Hiểu và vận dụng được bài toán đường đi ngắn nhất vào kinh tế;
3. Hiểu và vận dụng được bài toán cây bao trùm tối thiểu vào kinh tế;
4. Hiểu và vận dụng được bài toán đường dòng cực đại vào kinh tế.

Nội dung chương

- 3.1. Các khái niệm cơ bản
- 3.2. Bài toán đường ngắn nhất
- 3.3. Bài toán cây bao trùm tối thiểu
- 3.4. Bài toán dòng cực đại

3.1. Các khái niệm cơ bản

Đồ thị vô hướng G là một cặp hai tập (N, A) , trong đó N là tập các nút và A là tập các cung vô hướng. Cung vô hướng là một cặp không kể đến thứ tự hai nút khác nhau i và j nào đó, $i \in N$ và $j \in N$ ký hiệu là (i, j) . Vậy $(i, j) = (j, i)$ trong đồ thị vô hướng. Cung cũng được gọi là cạnh. Cung (i, j) nối các nút i và j . Cấp của một nút là số cung nối tới đó. Cấp của đồ thị là cấp cực đại trong các cấp của các nút của nó.

Một đường đi từ nút i_1 đến nút i_t là bộ t nút khác nhau $i_1, i_2, \dots, i_t$ sao cho $(i_k, i_{k+1}) \in A$ với mọi $k = \overline{1, t-1}$.

Chu trình là bộ t nút $i_1, i_2, \dots, i_t$ sao cho $i_1, \dots, i_{t-1}$ là một đường đi, $i_t = i_1$ và có ít nhất ba nút khác nhau. Đồ thị vô hướng được gọi là liên thông nếu ứng với mỗi cặp $i, j \in N$ đều có một đường đi từ i đến j . Số các nút của đồ thị thường ký hiệu là n , còn số các cung là m .

Đồ thị có hướng G cũng là một cặp (N, A) nhưng mỗi cung là một cặp nút có thứ tự. Vậy $(i, j) \neq (j, i)$. Trong đồ thị có hướng không được chứa cung “tự nối” (i, i) . Người ta sẽ nói cung (i, j) đi từ nút i đến nút j .

Đồ thị vô hướng tương ứng với một đồ thị có hướng là đồ thị nhận được khi không tính đến hướng trên các cung nữa.

Đồ thị có hướng là liên thông nếu đồ thị vô hướng tương ứng là liên thông.

Mỗi đường đi trong đồ thị vô hướng tương ứng đều gọi là một đường đi trong đồ thị có hướng. Đồ thị có hướng có thể chứa cả hai cung (i, j) và (j, i) nên để xác định một đường đi phải nói rõ cả dãy nút $i_1, \dots, i_t$ và dãy cung $a_1, \dots, a_{t-1}$. Khi đó nếu một cung a_k có dạng $a_k = (i_k, i_{k+1})$ thì ta nói a_k là cung tiến trong đường đi này. Ngược lại nếu $a_k = (i_{k+1}, i_k)$ thì a_k là cung lùi.

Chu trình cũng được định nghĩa như ở đồ thị vô hướng, nhưng ở đây cho phép chu trình chỉ gồm hai nút khác nhau.

Một đường đi hoặc chu trình được gọi là có hướng nếu nó chỉ chứa các cung tiến.

Cây là đồ thị vô hướng liên thông và không chứa chu trình.

Cây bao trùm của đồ thị $G(N, A)$ là một cây trong G có chứa tất cả các nút của G . Trong cây bao trùm, số nút bằng số nút của đồ thị nhưng số cung có thể ít hơn. Như vậy, cây bao trùm $G_s(N_s, A_s)$ có $N_s = N$ và $A_1 \subset A$.

Mạng là đồ thị, bao gồm các nút và cung. Trong thực tế, mỗi nút trên mạng có thể là thành phố, nhà máy, kho hàng, trường học, trạm xăng hay bất kỳ một vị trí nào; mỗi cung biểu diễn một đường đi có thể xuất hiện giữa các đại điểm. Trong mô hình mạng, tất cả các cung đều là cung có hướng trừ phi nó được xác định là đối xứng.

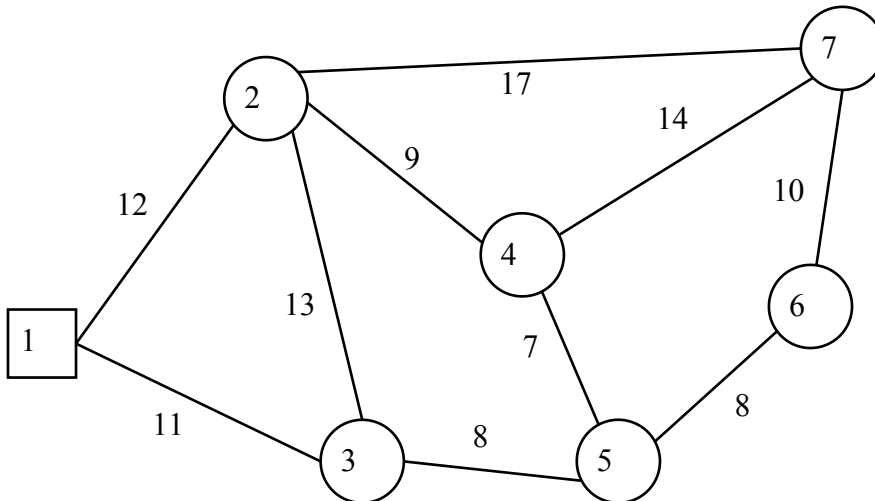
3.2. Bài toán đường ngắn nhất

3.2.1. Đặt vấn đề

Chúng ta xem xét việc ứng dụng mạng với mục tiêu chính là tìm đường ngắn nhất giữa 2 nút bất kỳ trong một sơ đồ mạng. Chúng ta minh họa bài toán đường ngắn nhất bằng việc khảo sát tình huống của Công ty xây dựng ABC. Công ty có một vài dự án xây dựng nằm khắp nơi trong địa bàn tỉnh. Hàng ngày, công ty có nhiều chuyến xe đưa đón công nhân, chuyên chở thiết bị và vật tư cung ứng đi lại giữa trụ sở công ty và các công trường xây dựng thì khoản chi phí liên quan đến hoạt động vận tải rất đáng quan tâm. Đối với bất kỳ một công trình xây dựng nào thì các tuyến đường ô tô hay đường cao tốc giữa các công trường có thể biểu diễn bằng sơ đồ mạng.

Sơ đồ mạng ở Hình 3-1 biểu diễn các tuyến đường giữa các công trường xây dựng và trụ sở công ty. Trong mạng này, các nút tương ứng với vị trí các công trường và văn phòng công ty và các cung biểu diễn con đường nối chúng. Khoảng cách giữa các công trường hay giữa văn phòng công ty với công trường được biểu thị bằng con số trên các cung tương ứng. Công ty muốn xác định các tuyến đường ngắn nhất nhằm tối thiểu hóa các khoảng cách di chuyển từ văn phòng công ty đến các công trường.

Hình 3-1: Mạng tuyến đường giữa các công trường



3.2.2. Mô tả dạng toán học của bài toán

Bài toán đường ngắn nhất là một bài toán phát sinh từ nhiều bài toán thực tế về vận tải, mạng thông tin, điều khiển tối ưu... Có thể phát biểu dạng toán học của bài toán như sau:

Cho một đồ thị có hướng $G(N,A)$, trong đó: N là tập các nút và A là tập các cung (i,j) (với $i,j \in N$). Mỗi cung có độ dài $c_{ij} \geq 0$, chính là khoảng cách giữa

hai nút. Để tìm đường ngắn nhất từ nút 1 đến nút k bất kỳ (với $k \in N$) chính là cần tính đường ngắn nhất từ nhiều hoặc thậm chí mọi nút khác 1 đến nút k . Vì vậy, bài toán đường ngắn nhất là bài toán tìm đường ngắn nhất từ mọi nút i (với $i \in N$) đến một nút k ($k \in N$) cho trước.

3.2.3. Thuật toán đặt nhãn

Nhãn của nút được xác định gồm 2 con số nằm trong dấu ngoặc vuông tương ứng với mỗi nút. Ký hiệu nhãn của nút i là $[c_{1i}, T]$, trong đó: c_{1i} là giá trị khoảng cách từ nút 1 đến nút i và T là ký hiệu của số thứ tự của nút đứng ngay trước nút i theo đường đi từ nút 1 đến nút i .

Một nút được đặt nhãn là một nút đã xác định được đường đi từ nút 1 đến nút đó. Nút chưa đặt nhãn là nút chưa xác định được đường đi từ nút 1 đến nút đó.

Một nút được đặt nhãn cố định khi đã xác định được đường đi ngắn nhất từ nút 1 đến nút này. Tuy nhiên, một nút có nhãn nhưng chưa xác định được đường đi ngắn nhất từ nút 1 đến nút đó thì gọi là nút có nhãn tạm thời.

Ý tưởng cơ bản của thuật toán đặt nhãn do Dijkstra (1959) phát triển là lần lượt tìm đường đi ngắn nhất từ mỗi nút đến nút gốc, bắt đầu từ nút có đường đi ngắn hơn cả, rồi theo thứ tự nút có đường ngắn hơn làm trước.

Thuật toán đặt nhãn gồm các bước cụ thể sau:

Bước 1: Đầu tiên, giả sử nút 1 có nhãn cố định $[0, S]$. Số 0 biểu thị khoảng cách từ nút 1 đến chính nó và S biểu thị nút 1 là nút khởi động (Start).

Bước 2: Đặt nhãn tạm thời cho các nút liên thông trực tiếp từ nút 1. Gọi N_1 là tập các nút liên thông với nút 1. Giả sử nút $i \in N_1$ là nút liên thông trực tiếp với nút 1 sẽ có nhãn tạm thời $[c_{1i}, 1]$. Trong đó, giá trị khoảng cách c_{1i} bằng giá trị khoảng cách từ nút 1 đến nút i và số thứ tự của nút ngay trước bằng 1.

Tiến hành đặt nhãn cố định cho nút $k \in N_1$ thỏa mãn điều kiện $c_{1k} = \min \{c_{1i}\}$, $i \in N_1$

Bước 3: Xem xét các nút liên thông với nút k . Đặt nhãn tạm thời cho những nút chưa đặt nhãn. Điều chỉnh nhãn tạm thời cho các nút theo nguyên tắc:

Giả sử nút j đang xét, liên thông với nút k bằng cung (k, j) thì thay thế giá trị khoảng cách của nhãn nút j bằng $\min \{c_{1j}, c_{1k} + c_{kj}\}$.

Gọi N_{tt} là tập hợp các nút có nhãn tạm thời, xét các c_{1j} với $\forall j \in N_{tt}$ giả sử $c_{1m} = \min \{c_{1m}\}$. Như vậy, đặt nhãn cố định cho nút m .

Tiếp tục qui trình này cho đến khi tất cả các nút có nhãn cố định thì kết thúc thuật toán.

Bước 4: Xác định khoảng cách ngắn nhất từ nút 1 đến nút k bất kỳ. Đường ngắn nhất đến một nút nhất định k có thể tìm bằng cách xuất phát từ nút k và

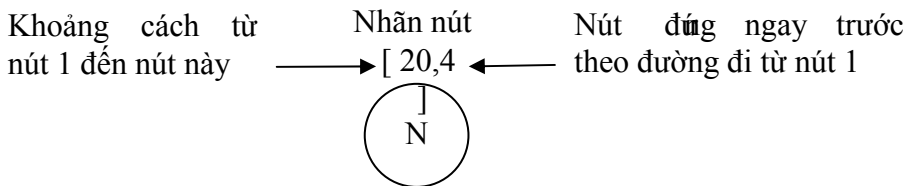
di chuyển ngược về nút ngay trước. Tiếp tục di chuyển ngược chiều qua mạng sẽ tìm thấy đường ngắn nhất từ nút 1 đến nút đang đề cập.

Thuật toán này sẽ xác định đường ngắn nhất từ nút 1 cho đến từng nút i , $i=2,3..n$ trong mạng. Chú ý rằng cần có $N-1$ bước lặp để tìm ra đường ngắn nhất đến tất cả các nút khác. Nếu không quan tâm đến khoảng cách ngắn nhất đến tất cả các nút, thuật toán có thể dừng lại một khi các nút quan tâm đã được đặt nhãn cố định. Thuật toán này cũng dễ dàng điều chỉnh để tìm ra đường ngắn nhất từ bất kỳ nút nào, chẳng hạn từ nút i đến $\forall j$ ($j \neq i$ và $i, j \in N$). Để thực hiện việc thay đổi này, chúng ta chỉ bắt đầu đặt nhãn cho nút k với nhãn cố định $[0, S]$. Do đó bằng cách áp dụng các bước của thuật toán, chúng ta có thể tìm đường ngắn nhất từ nút k đến từng nút khác trong mạng.

Ứng dụng thuật toán đặt nhãn

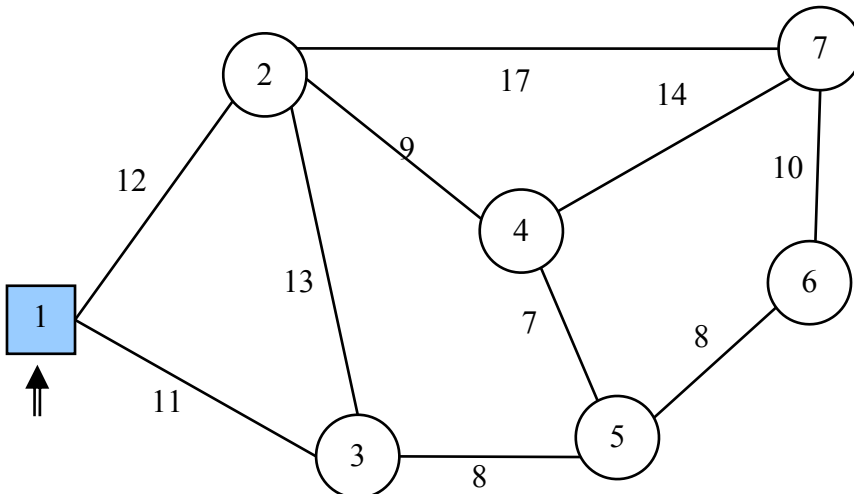
Để giải quyết bài toán của công ty ABC, chúng ta cần xác định tuyến đường ngắn nhất từ văn phòng công ty (được xem là nút 1) đến từng nút khác trong sơ đồ mạng. Bây giờ, chúng ta cùng xem xét các nhãn được tính toán như thế nào và bằng cách nào qui trình đặt nhãn có thể xác định được con đường ngắn nhất đến từng nút trong mạng sơ đồ.

Hình 3-2: Cách biểu thị các tham số trên một nút



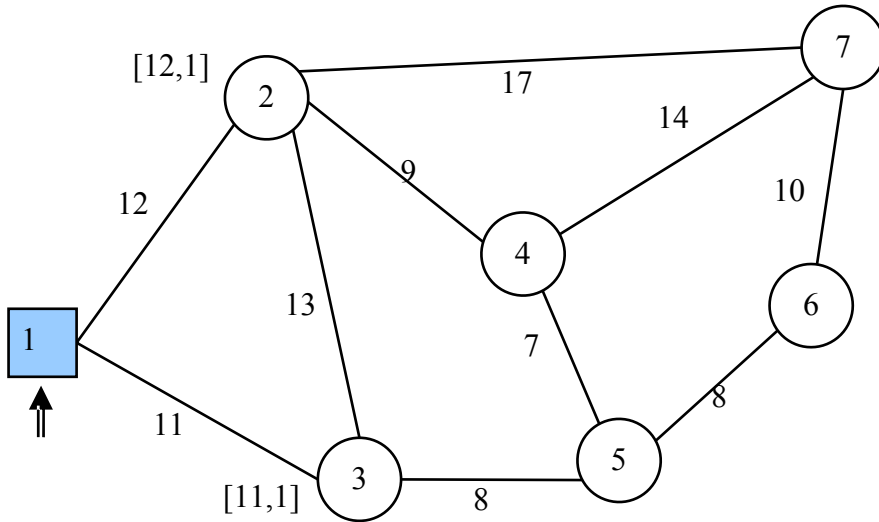
Bước 1: Nút 1 có nhãn cố định $[0, S]$, xem minh họa ở Hình 3-3.

Hình 3-3: Dạng thức đầu tiên của sơ đồ mạng

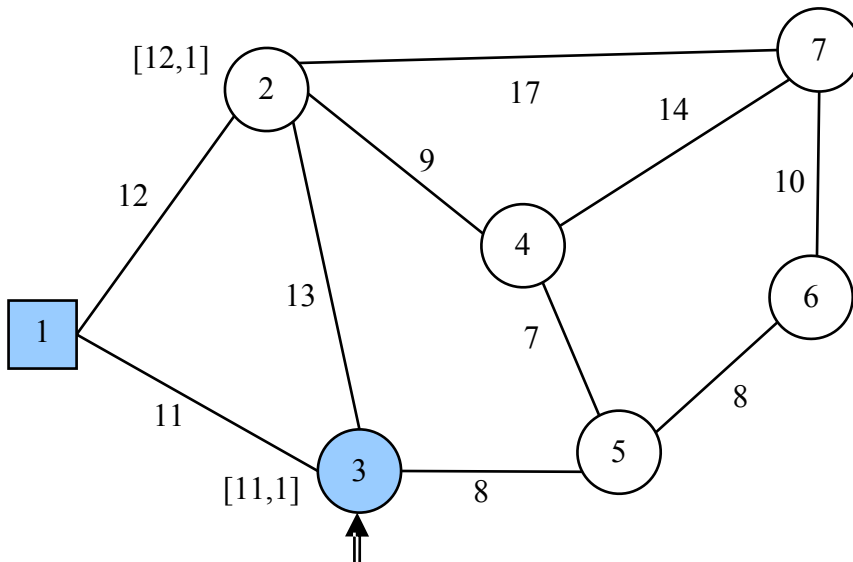


Bước 2: Tập các nút liên thông với nút 1 là $N_1 = \{2, 3\}$. Đặt nhãn tạm thời cho các nút 2, 3 lần lượt là $[12, 1]$, $[11, 1]$, xem minh họa ở Hình 3-4. Nút 3 $[11, 1]$ được đặt nhãn cố định vì $c_{13} < c_{12}$, xem minh họa ở Hình 3-5.

Hình 3-4: Sơ đồ mạng với nút 2, 3 có nhãn tạm thời



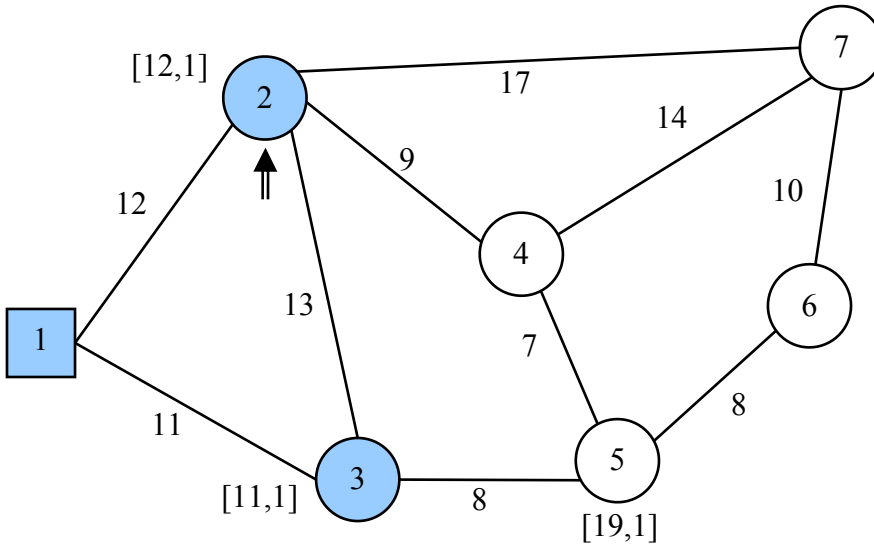
Hình 3-5: Sơ đồ mạng với nút 3 có nhãn cố định



Bước 3: Tập hợp các nút liên thông với nút 3, $N_3 = \{2, 5\}$. Đặt nhãn tạm thời cho nút 5 là $[19, 3]$. Nút 2 đã có nhãn tạm thời nên xem xét nút 2 để điều chỉnh. Vì giá trị khoảng cách của nút 2 = $\min\{c_{12}, c_{13} + c_{23}\} = \min\{12,$

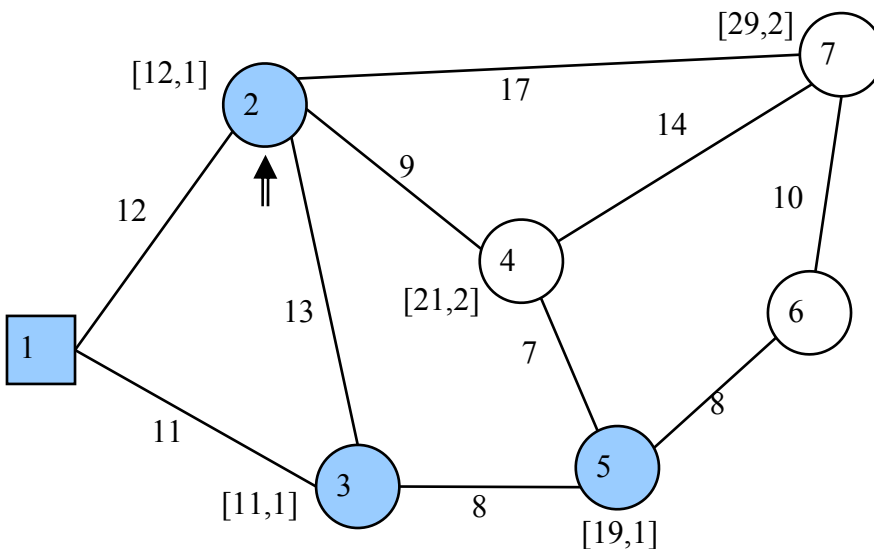
$11+13=24$ nên không điều chỉnh. Đặt nhãn cố định cho nút 2 vì $c_{12} < c_{15}$. Xem minh họa Hình 3-6.

Hình 3-6: Sơ đồ mạng với nút 2 có nhãn cố định



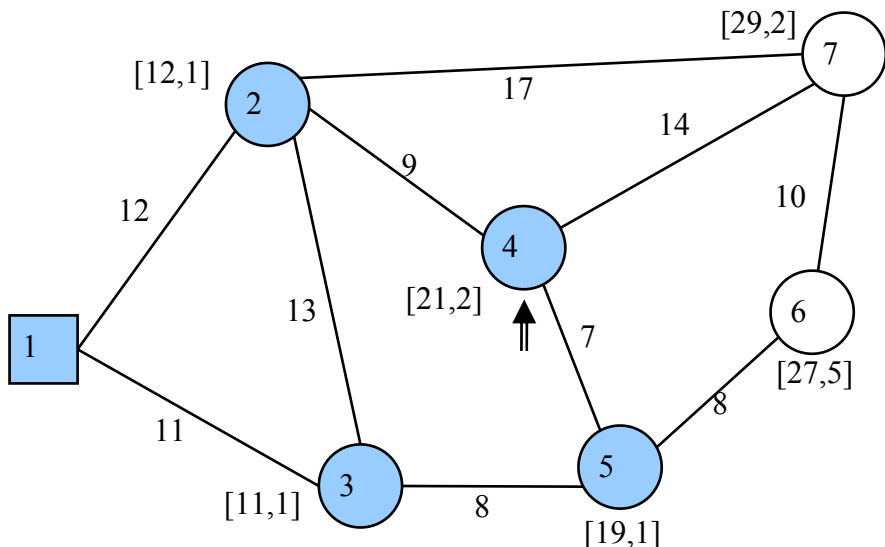
Tiếp tục, chúng ta xem tập hợp các nút liên thông với nút 2, $N_2 = \{4, 7\}$. Điều chỉnh nhãn tạm thời cho nút 4, 7 lần lượt là $4[21, 2]$ và $7[29, 2]$. Lựa chọn nút có giá trị khoảng cách nhỏ nhất trong tập hợp $N_1 \cup N_3 \cup N_2$, cụ thể là tập $\{5, 4, 7\}$, để đặt nhãn cố định. Nút được lựa chọn là nút 5. Xem minh họa ở Hình 3-7.

Hình 3-7: Sơ đồ mạng với nút 5 có nhãn cố định



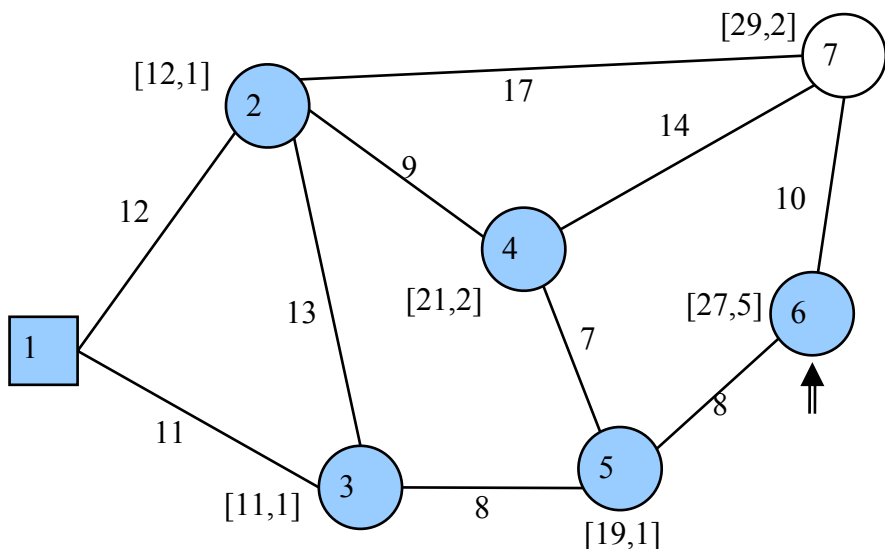
Kế tiếp, tập hợp các nút liên thông với nút 5: $N_5 = \{4, 6\}$. Điều chỉnh nhãn tạm thời cho nút 4 và 6 lần lượt là $4[21, 5]$ và $6[27, 5]$. Tương tự, nút 4 được chọn đặt nhãn cố định. Xem minh họa ở Hình 3-8.

Hình 3-8: Sơ đồ mạng với nút 4 có nhãn cố định



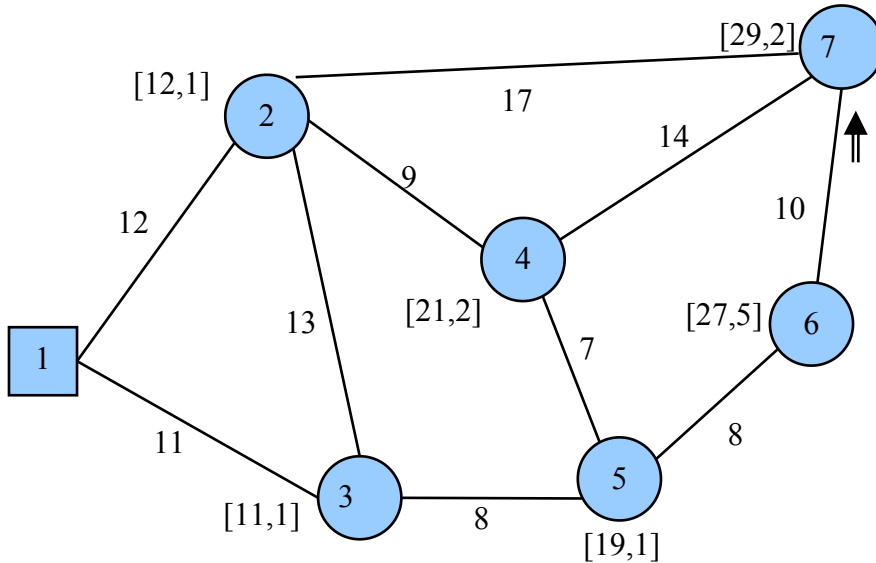
Tiếp theo, tập hợp các nút liên thông với nút 4: $N_4 = \{7\}$. Nhãn tạm thời của nút 7 không điều chỉnh nên vẫn có nhãn $[29, 2]$. Và nút 6 được chọn để đặt nhãn cố định $[27, 5]$. Xem minh họa ở Hình 3-9.

Hình 3-9: Sơ đồ mạng với nút 6 có nhãn cố định



Cuối cùng, chỉ có nút 7 liên thông với nút 6. Giá trị khoảng cách của nút 7 = $\min\{c_{17}, c_{16} + c_{67}\} = \{29, 27 + 10\} = 29$. Xem minh họa ở Hình 3-10. Nên không điều chỉnh giá trị khoảng cách của nhãn tạm thời. Vì nút 7 là nút duy nhất còn lại nên bây giờ được đặt nhãn cố định.

Hình 3-10: Sơ đồ mạng với nút 7 có nhãn cố định



Hình 3-10 giới thiệu sơ đồ mạng với tất cả các nút có nhãn cố định.

Bước 4: Di chuyển ngược chiều từ nút 7 đến nút ngay trước và tiếp tục như vậy.

Chúng ta sử dụng thông tin trên các nhãn cố định để tìm đường đi ngắn nhất từ nút 1 đến từng nút trong sơ đồ mạng. Ví dụ, nhãn cố định của nút 7 [29,2] cho biết đường đi ngắn nhất từ nút 1 đến nút 7 là 29 km. Để tìm đường đi ngắn nhất định mà cho phép liên thông đến nút 7 với 29km, chúng ta bắt đầu từ nút 7 và đi ngược về nút 1. Nhãn của nút 7 cho biết nút liên thông kế tiếp là nút 2 và nhãn nút 2 chỉ rõ nút 1 là nút liên thông kế tiếp. Do vậy, đường ngắn nhất đến nút 7 là 1-2-7.

Đường đi ngắn nhất đến các nút được xác định như Bảng 3-1.

Bảng 3-1: Đường đi ngắn nhất giữa các nút

Nút	Đường ngắn nhất từ nút 1	Khoảng cách bằng km
2	1-2	12
3	1-3	11

4	1-2-4	21
5	1-3-5	19
6	1-3-5-6	27
7	1-2-7	29

Có thể một bài toán nhỏ như bài toán của công ty xây dựng ABC bạn có thể tìm ra đường đi ngắn nhất khá nhanh, nếu không nhanh hơn bằng việc dò dẫm. Tuy nhiên, một khi chúng ta bắt đầu nghiên cứu bài toán với 15 đến 20 nút hoặc nhiều hơn, nó khá mất thời gian để tìm ra đường đi ngắn nhất bằng việc dò dẫm. Thật vậy, bởi vì con số đường đi tùy chọn gia tăng trong một mạng lớn hơn, nó dễ dàng bỏ lỡ một hay nhiều tuyến đường và đưa đến phương án sai. Do vậy, đối với các bài toán lớn hơn cần thiết phải có một qui trình có tính hệ thống như qui trình đặt nhãn nêu trên. Ngay cả với phương pháp đặt nhãn, chúng ta phát hiện rằng một khi sơ đồ mạng tăng lên về kích cỡ, nó trở nên cần thiết thực hiện thuật toán trên máy tính.

△ Chú ý và nhận xét:

Nhiều ứng dụng của thuật toán đường ngắn nhất liên quan đến tiêu chuẩn như thời gian hoặc chi phí thay vì khoảng cách. Trong những trường hợp này, thuật toán đường ngắn nhất đưa ra giải pháp thời gian tối thiểu hay chi phí tối thiểu. Tuy nhiên, bởi vì thuật toán đường ngắn nhất luôn xác định một giải pháp giá trị tối thiểu, nó không có ý nghĩa khi áp dụng thuật toán cho các bài toán liên quan đến tiêu chuẩn lợi nhuận.

Trong một vài ứng dụng, giá trị gắn liền với một cung có thể âm. Ví dụ, trong tình huống chi phí là tiêu chuẩn, giá trị trên cung âm biểu diễn cước phí âm; hay nói cách khác một khoản lợi nhuận sẽ được hình thành khi đi qua cung này. Thuật toán đường ngắn nhất trình bày ở đây chỉ có thể áp dụng cho các mạng có giá trị trên cung không âm. Các chuyên đề nâng cao đề cập các thuật toán có thể giải quyết vấn đề với giá trị cung không âm.

3.3. Bài toán cây bao trùm tối thiểu

3.3.1. Đặt vấn đề

Một cây bao trùm là tập hợp các cung liên thông tất cả các nút trong mạng mà không hình thành một chu trình.

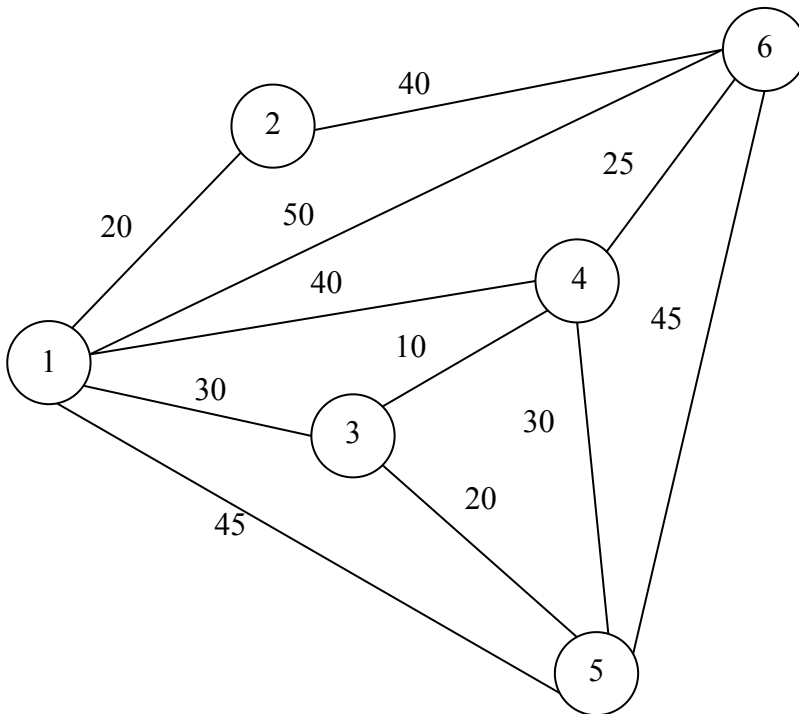
Trong thuật ngữ mạng, bài toán cây bao trùm tối thiểu liên quan việc sử dụng các cung của mạng để liên thông với tất cả các nút của mạng sao cho tổng chiều dài của tất cả các cung là nhỏ nhất.

Để hiểu rõ hơn về vấn đề này, chúng ta xem xét bài toán thiết kế hệ thống truyền thông của một trung tâm máy tính khu vực.

Trung tâm máy tính khu vực phải lắp đặt đường cáp truyền thông máy tính để liên kết 5 người sử dụng các máy tính vệ tinh với một máy tính trung tâm. Công ty sẽ lắp đặt mạng truyền thông mới. Việc lắp đặt là một công việc tốn kém nên nhằm giảm chi phí, nhóm quản trị mạng trung tâm muốn tổng chiều dài đường cáp truyền thông càng ngắn càng tốt. Trong khi máy tính trung tâm có thể được kết nối trực tiếp với từng máy vệ tinh, rõ ràng sẽ có hiệu quả kinh tế hơn nếu lắp đặt một đường cáp trực tiếp đến một vài người sử dụng và cho phép những người sử dụng khác tham gia vào hệ thống bằng cách liên kết với những người sử dụng đã kết nối với hệ thống. Thiết kế hệ thống truyền thông với tổng chiều dài nhỏ nhất là một ví dụ của bài toán cây bao trùm tối thiểu.

Mạng truyền thông của Trung tâm máy tính khu vực được giới thiệu ở Hình 3-11. Mạng này giới thiệu các tuyến đường liên thông có thể và khoảng cách giữa chúng tính bằng km.

Hình 3-11: Mạng truyền thông của Trung tâm máy tính khu vực



Mỗi cung (i,j) trong mạng có một chiều dài đi kèm với nó và cung (i,j) thể hiện cách thức liên kết giữa nút i và nút j . Ví dụ, mỗi nút trong mạng đại diện cho một máy tính, cung (i,j) có thể tượng trưng cho một đường dây cáp ngầm nối máy tính i và máy tính j . Chúng ta muốn xác định tập hợp các cung liên thông tất cả các nút trong mạng sao cho tổng chiều dài các cung là nhỏ nhất.

3.3.2. Mô tả dạng toán học của bài toán

Cho một đồ thị vô hướng $G(N, A)$, trong đó N là tập các nút, gồm các nút $1, 2, 3, \dots, n$ và A là tập các cung, mỗi cung được ký hiệu (i, j) , $i, j \in N$. Độ dài mỗi cung có khoảng cách $c_{ij} \geq 0$. Để tìm cây bao trùm tối thiểu của đồ thị G là tìm một cây $G_s(N_s, A_s)$ thỏa mãn $\min \sum c_{ij} (\forall (i, j) \in A_s, A_s \subset A)$. Vì vậy, bài toán cây bao trùm tối thiểu là bài toán tìm tập hợp các cung liên thông tất cả các nút với tổng khoảng cách trên các cung nhỏ nhất.

3.3.3. Thuật toán cây bao trùm tối thiểu

Một cây bao trùm cho một mạng có N nút là một tập hợp $N-1$ cung liên thông tất cả các nút đến tất cả các nút khác. Cây bao trùm tối thiểu cho biết tập hợp các cung với tổng chi phí trên cung nhỏ nhất hay tổng khoảng cách trên cung nhỏ nhất. Thuật toán mạng đơn giản có thể được sử dụng để giải quyết bài toán cây bao trùm tối thiểu. Các bước của thuật toán như sau:

Tư tưởng của thuật toán là xem xét các nút và đưa từng nút vào tập các nút N_s . Thuật toán cây bao trùm tối thiểu gồm các bước sau:

Gọi N_C là tập các nút liên thông (Connected nodes), được chọn để đưa vào N_s và N_U là tập các nút chưa liên thông (Unconnected nodes).

Bước 1: Bắt đầu tại một nút i bất kỳ. Nút $i \in N_C$. Xét các cung (i, k) với $k \in N_U$. Chọn cung có khoảng cách nhỏ nhất theo tiêu chuẩn đang sử dụng (ví dụ thời gian, chi phí hoặc khoảng cách). Giả sử $c_{ij} = \min\{c_{ik}\}$, bổ sung nút j vào N_C . Cung $(i, j) \in A_s$. Loại nút j khỏi N_U .

Bước 2: Xét tất cả các cung nối từ tập N_C đến N_U . Giả sử cung (m, k) với $m \in N_C$ và $k \in N_U$ có giá trị khoảng cách nhỏ nhất. Do đó, cung (m, k) sẽ thuộc cây bao trùm tối thiểu. Nếu có hai hoặc nhiều cung có giá trị khoảng cách nhỏ bằng nhau thì tùy ý chọn 1 cung.

Điều chỉnh lại tập hợp N_C và N_U bằng cách bổ sung nút k vào N_C và loại nút k khỏi N_U . Lặp lại *Bước 2* cho đến khi $N_C = N$ và $N_U = \emptyset$.

Ứng dụng thuật toán

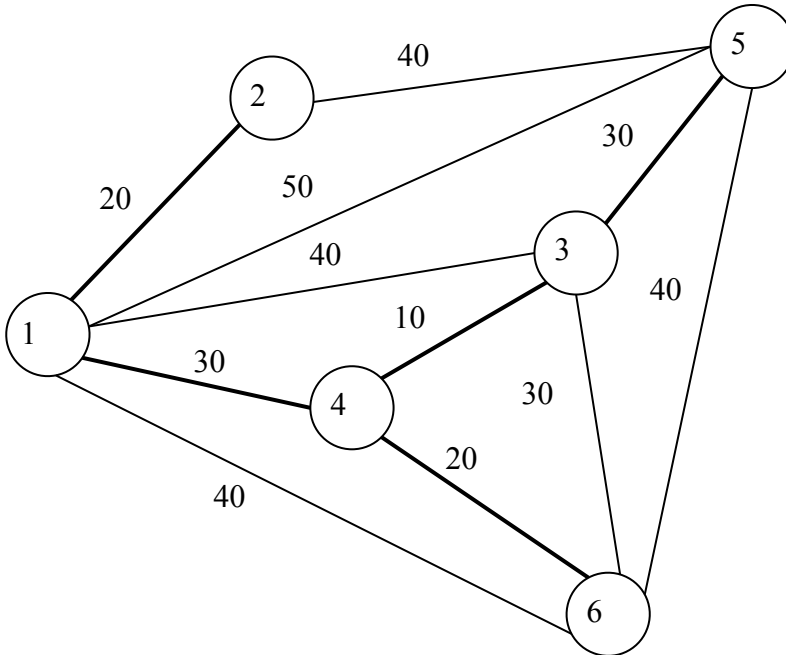
Bước 1: Một cách tùy ý, chúng ta bắt đầu tại nút 1, $N_C = \{1\}$. Xét các cung có nối với nút 1, cung $(1, 2)$ với khoảng cách bằng 20 km là nhỏ nhất. Vậy cung $(1, 2)$ thuộc cây bao trùm tối thiểu. Điều chỉnh tập nút $N_C = \{1, 2\}$ và tập nút $N_U = \{3, 4, 5, 6\}$.

Bước 2: Xét tất cả các cung nối các nút từ tập N_C đến N_U . Cung $(1, 4)$ với khoảng cách bằng 30 km là nhỏ nhất so với các cung đang xét khác. Vậy, cung $(1, 4)$ thuộc cây bao trùm tối thiểu. Điều chỉnh tập nút $N_C = \{1, 2, 4\}$ và tập nút $N_U = \{3, 5, 6\}$.

Lặp lại *Bước 2:* Cung $(4, 3)$ với khoảng cách bằng 10 km là nhỏ nhất so với các

cung đang xét khác. Vậy, cung (4,3) thuộc cây bao trùm tối thiểu. Điều chỉnh tập nút $N_C = \{1,2,4,3\}$ và tập nút $N_U = \{5,6\}$.

Hình 3-12: Mạng truyền thông cây bao trùm tối thiểu



Lặp lại *Bước 2*: Cung (4,6) với khoảng cách bằng 20 km là nhỏ nhất. Vậy cung (4,6) thuộc cây bao trùm tối thiểu. Điều chỉnh tập $N_C = \{1,2,4,3,6\}$, tập $N_U = \{5\}$.

Lặp lại *Bước 2*: Cung (3,5) với khoảng cách bằng 30km là nhỏ nhất. Vậy, cung (3,5) thuộc cây bao trùm tối thiểu. Điều chỉnh tập $N_C = \{1,2,4,3,5,6\}$, tập $N_U = \{\emptyset\}$.

Cây bao trùm tối thiểu bao gồm các cung (1,2), (1,4), (4,3), (4,6) và (3,5) với tổng khoảng cách bằng 110 km. Hình 3-12 mô tả cây bao trùm tối thiểu của bài toán thiết kế hệ thống truyền thông cho Trung tâm máy tính khu vực.

3.4. Bài toán dòng cực đại

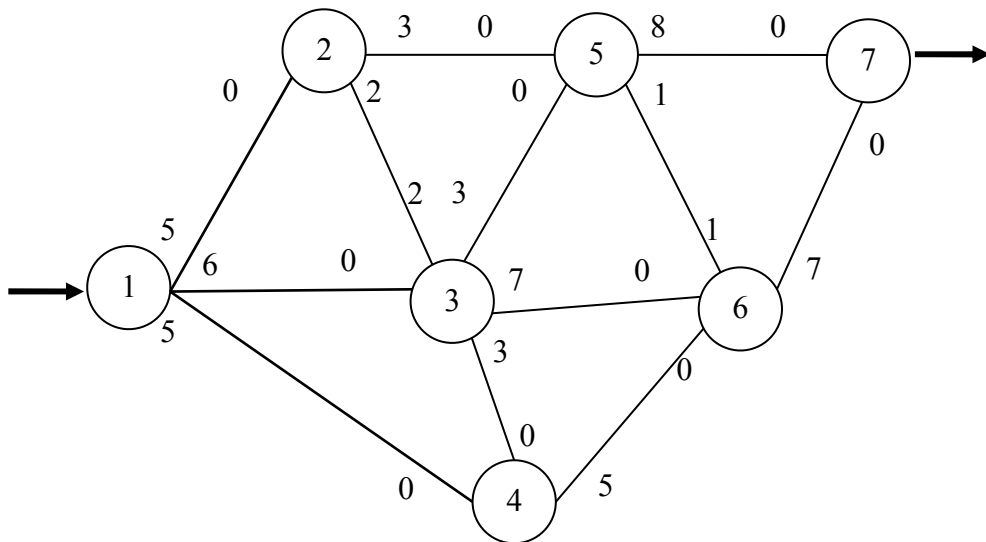
3.4.1. Đặt vấn đề

Chúng ta cùng xem xét hệ thống đường cao tốc liên tỉnh Bắc Nam đi qua Thành phố A. Dòng phương tiện di chuyển Bắc Nam đạt mức 1500 phương tiện/giờ vào thời gian cao điểm. Để thực hiện chương trình duy tu bảo dưỡng đường cao tốc vào mùa hè, theo đó cần thiết phải tạm thời đóng một số làn xe và giới hạn tốc độ thấp hơn, Sở giao thông đã đề trình một mạng tuyến đường tùy chọn qua Thành phố. Các tuyến đường thay thế tùy chọn bao gồm các

đường cao tốc khác và các đường nội thị. Do sự khác biệt về giới hạn tốc độ và mô hình giao thông, tải năng trên dòng sẽ khác nhau và phụ thuộc vào các con đường nội thị và tuyến đường sử dụng. Mạng giao thông đề xuất với tải năng trên dòng của mỗi cung được giới thiệu ở Hình 3-13.

Tải năng trên dòng được hình thành dựa vào hướng đi của dòng. Ví dụ, phần đường cao tốc theo cung (1,2) biểu thị mức tải năng 500 phương tiện vận tải/giờ theo hướng đi 1-2; tuy nhiên, theo hướng đi 2-1 thì tải năng chỉ bằng không. Tải năng bằng không chứng tỏ rằng các nhà lập kế hoạch mạng đường cao tốc không muốn các phương tiện di chuyển theo hướng 2-1. Nói một cách logic, bởi vì nút 1 là nút cung hay nút nguồn và một vị trí có nguy cơ ùn tắc giao thông, chính vì vậy cho phép việc di chuyển từ nút 2 đi vào nút giao thông 1 là điều không mong muốn. Tải năng theo hướng của cung (1,2) đồng thời có thể giải thích là đường một chiều từ nút giao thông 1. Ví dụ này cho thấy tải năng trên mỗi cung có thể phụ thuộc vào chiều đi của dòng. Bạn có thể tin tưởng là mạng hệ thống đường cao tốc có thể đáp ứng được dòng lưu chuyển phương tiện vận tải theo mức 1500 phương tiện/giờ hay không? Số lượng phương tiện vận tải tối đa di chuyển/giờ cho mạng là bao nhiêu? Và trên mỗi cung số lượng phương tiện vận tải nên đi qua mỗi cung là bao nhiêu?

Hình 3-13: Mạng hệ thống đường cao tốc liên tỉnh



3.4.2. Mô tả dạng toán học của bài toán

Xem xét một mạng có một nút nguồn hay nút cung và một nút hút hay nút nhu cầu. Bài toán dòng cực đại đặt ra vấn đề: Lượng dòng cực đại như phương tiện vận tải, dữ liệu, chất lỏng... có thể đi vào và đi ra hệ thống mạng này trong một thời gian nhất định. Trong những bài toán dạng này, chúng ta tìm

cách xác định lượng dòng qua tất cả các cung trên mạng càng lớn càng tốt.

Trong nhiều tình huống, chúng ta có thể giả thiết các cung có một tải năng nhất định nhằm hạn chế số lượng có thể di chuyển qua cung. Lượng dòng phụ thuộc vào ràng buộc tải năng trên tất cả các cung của mạng (đây chính là giới hạn tối đa hay giới hạn tải năng trên dòng của mỗi cung). Ví dụ, loại đường cao tốc giới hạn dòng phương tiện vận tải trong hệ thống vận tải trong khi cỡ ống dẫn dầu giới hạn lượng dầu lưu chuyển trong một hệ thống phân phối dầu. Trong khi chúng ta không xác định rõ năng lực của mỗi nút, chúng ta giả thiết rằng dòng đi vào của một nút ngang bằng với dòng đi ra của nút này.

Cho một đồ thị có hướng $G(N,A)$ có tải năng tối đa trên các cung là u_{ij} , $(i,j) \in A$, có thể bằng $+\infty$. Dòng thực tế trên các cung là x_{ij} , $0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$, $(i,j) \in A$. Giả sử s_0 và s_1 là hai nút đặc biệt, gọi tương ứng là nút nguồn và nút hút. Tìm dòng cực đại là tìm x_{ij} thỏa mãn $\max \sum x_{i,s_1}$ với $i \in N$. Chính vì vậy bài toán dòng cực đại là bài toán đi tìm dòng thực tế trên cung sao cho tổng dòng đi vào nút hút là cực đại.

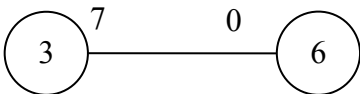
3.4.3. Thuật toán dòng cực đại

Như chúng ta sẽ trình bày, thuật toán dòng tối đa được giới thiệu trong phần này sử dụng phương pháp tiếp cận chung như sau:

- Tìm bất kỳ đường đi nào từ nút nguồn đến nút hút mà có tải năng trên dòng theo hướng đi của dòng lớn hơn 0 cho tất cả các cung trên đường đi.
- Gia tăng dòng theo đường đi càng nhiều càng tốt.
- Tiếp tục tìm các đường đi từ nút nguồn - nút hút, mà có tải năng trên dòng theo hướng đi của dòng lớn hơn 0 cho tất cả các cung, và gia tăng dòng theo các đường đi càng nhiều càng tốt.
- Chấm dứt thuật toán khi không thể tìm thêm một đường đi từ nút nguồn đến nút hút có tải năng trên dòng lớn hơn 0 trên tất cả các cung theo đường đi.

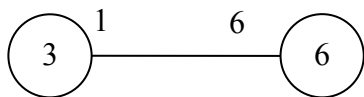
Trước khi trình bày chi tiết về thuật toán dòng cực đại, chúng ta mô tả qui trình nhằm đảm bảo rằng mỗi bước theo trục giác sẽ dẫn đến giải pháp tối ưu cho bài toán dòng cực đại.

Qui trình này sử dụng lượng dòng bổ nhiệm để chọn tuyến đường tùy chọn bằng các dòng giả theo hướng đi ngược lại. Ví dụ, xem cung (3,6)



Ở đây, chúng ta thấy rằng tải năng ban đầu theo dòng theo chiều 3-6 là 700 phương tiện/giờ, trong khi dòng di chuyển theo chiều 6-3 thì không được.

Nếu chúng ta chọn dòng di chuyển 600 phương tiện/giờ theo chiều 3-6 thì chúng ta điều chỉnh tải năng theo dòng như sau:



Chú ý rằng chúng ta đã giảm tải năng trên dòng theo hướng đi 3-6 bằng một mức 600 phương tiện mỗi giờ và đồng thời tăng tải năng trên dòng theo hướng đi 6-3 bằng một mức bằng nhau. Tải năng trên dòng điều chỉnh với mức 100 phương tiện mỗi giờ theo hướng đi 3-6 có thể giải thích là tải năng còn lại trên dòng của cung. Tuy nhiên, chú ý rằng hướng đi 6-3 có tải năng ban đầu theo dòng bằng 0, bây giờ đã có tải năng đã điều chỉnh theo dòng với mức 600 phương tiện mỗi giờ. Tải năng đã điều chỉnh theo dòng 6-3 thực sự chứng minh rằng một dòng giả tối đa 600 phương tiện mỗi giờ thì được phép theo hướng đi này. Dòng giả này sẽ không thực sự cho phép các phương tiện di chuyển theo hướng 6-3 nhưng thực ra là giảm lượng dòng theo cam kết ban đầu đi theo hướng 3-6. Quả thật, dòng giả theo hướng 6-3 sẽ dẫn đến việc chuyển đổi dòng theo cam kết ban đầu theo hướng 3-6 thành các cung khác trong mạng.

Quá trình theo dõi tải năng trên dòng là một phần quan trọng của thuật toán dòng cực đại. Chẳng hạn, trong một bước đi trước của thuật toán, chúng ta phải chẳng thừa nhận lượng dòng theo một cung nhất định. Sau này, tùy thuộc vào lượng dòng xác định ở các cung khác, việc giảm lượng dòng theo một cung ban đầu có thể sẽ hợp lý. Qui trình này sẽ xác định mức độ cho phép quyết định ban đầu của chúng ta chấp nhận lượng dòng cần thiết phải điều chỉnh nhằm gia tăng tổng lượng dòng qua mạng.

Các bước của thuật toán dòng cực đại

Bước 1: Tìm bất kỳ một đường đi từ nút nguồn đến nút hút có các tải năng trên dòng theo hướng đi lớn hơn 0 đối với tất cả các cung theo đường đi. Nếu không có đường đi nào như vậy, phương án tối ưu đã đạt được và chuyển sang bước 4.

Bước 2: Tìm tải năng nhỏ nhất của cung theo đường đi lựa chọn ở bước 1: P_f .

Bước 3: Đối với đường đi lựa chọn ở bước 1, giảm tất cả tải năng dòng trên cung theo hướng đi bằng một lượng P_f và tăng tất cả tải năng dòng trên cung theo hướng đi ngược bằng một lượng P_f .

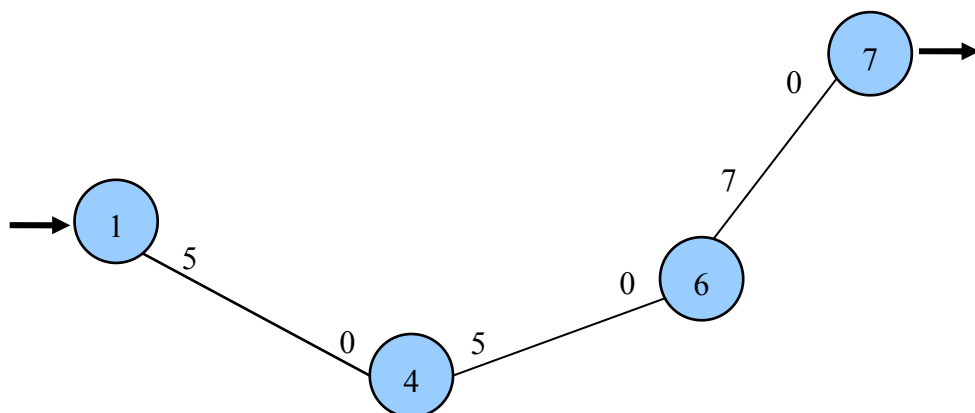
Quay lại *bước 1*.

Bước 4: So sánh tải năng ban đầu và cuối cùng trên dòng của cung cho tất cả các cung trong mạng cho phép xác định mô hình dòng cuối cùng.

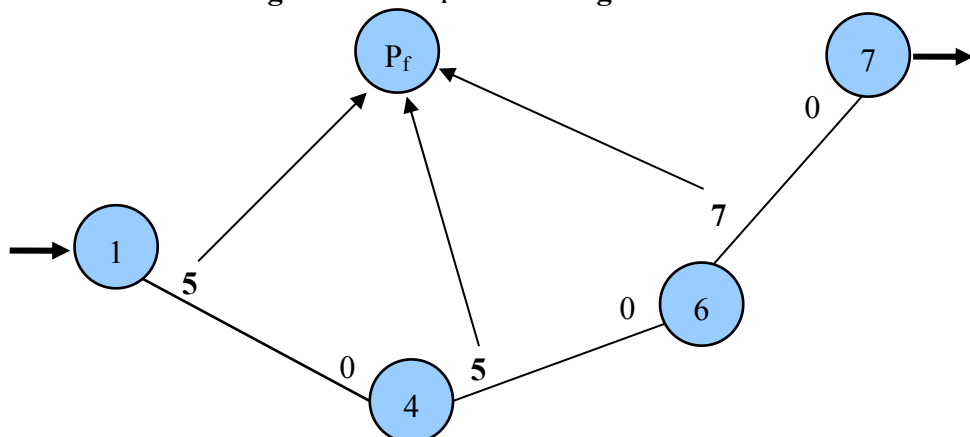
Ứng dụng thuật toán:

Bước 1: Chọn đường đi 1-4-6-7 vì tải năng các cung theo hướng đi lớn hơn không. Xem Hình 3-14.

Hình 3-14: Đường đi 1-4-6-7

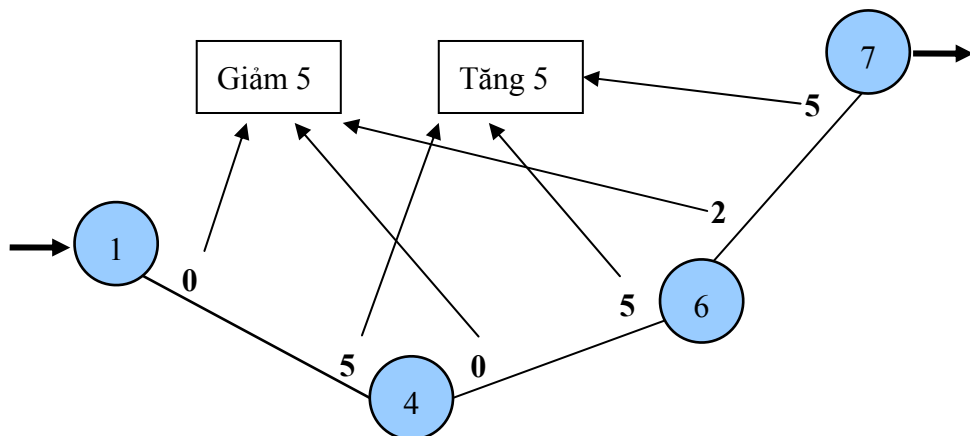


Bước 2: Tìm tải nặng nhỏ nhất trên đường đi.

Hình 3-15: Tải nặng nhỏ nhất P_f trên đường đi 1-4-6-7

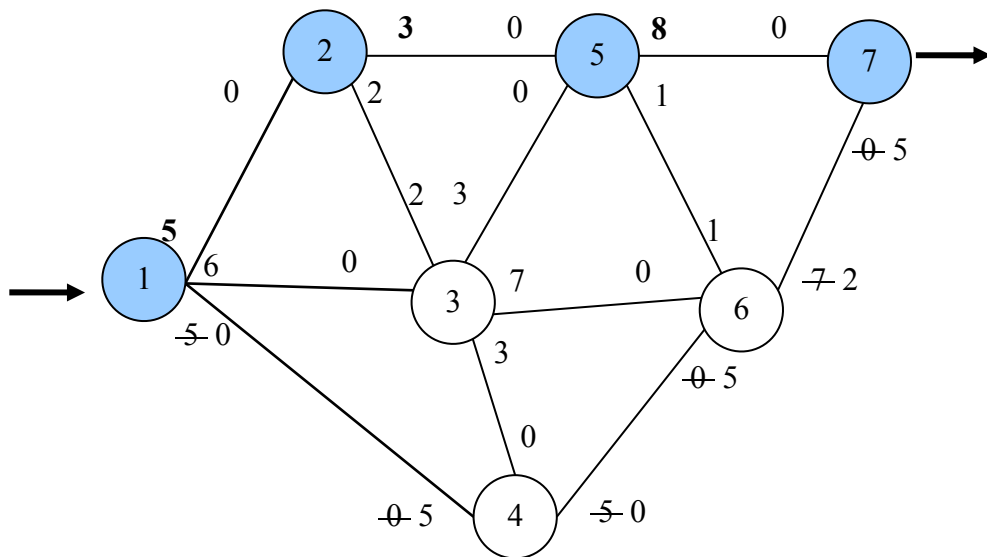
Bước 3: Điều chỉnh dòng trên đường 1-4-6-7 theo cách như trên Hình 3-16.

Hình 3-16: Cách thức điều chỉnh tải nặng trên đường đi



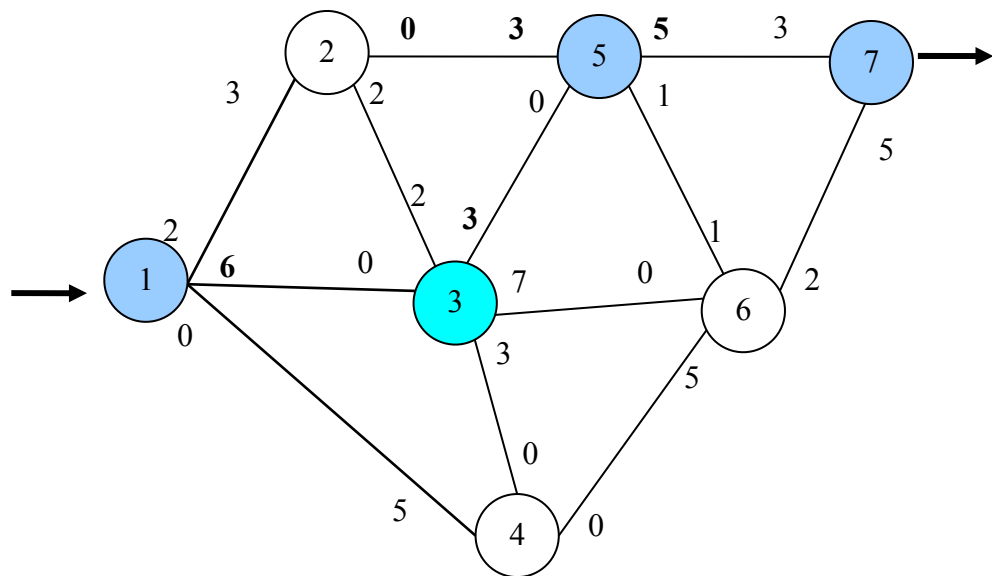
Bước lặp lần 1: Quay trở lại bước 1, chọn đường đi 1-2-5-7 với tải năng nhỏ nhất $P_f=3$. Xem Hình 3-17.

Hình 3-17: Đường đi 1-2-5-7 với $P_f=3$



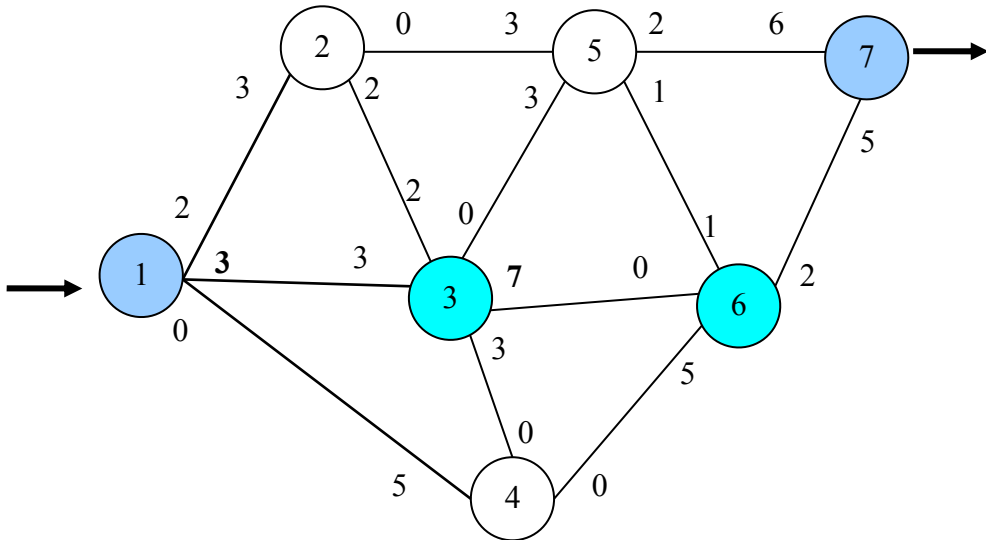
Bước lặp lần 2: Quay trở lại bước 1, chọn đường đi 1-3-5-7 với tải năng nhỏ nhất $P_f=3$. Xem Hình 3-18.

Hình 3-18: Đường đi 1-3-5-7 với $P_f=3$



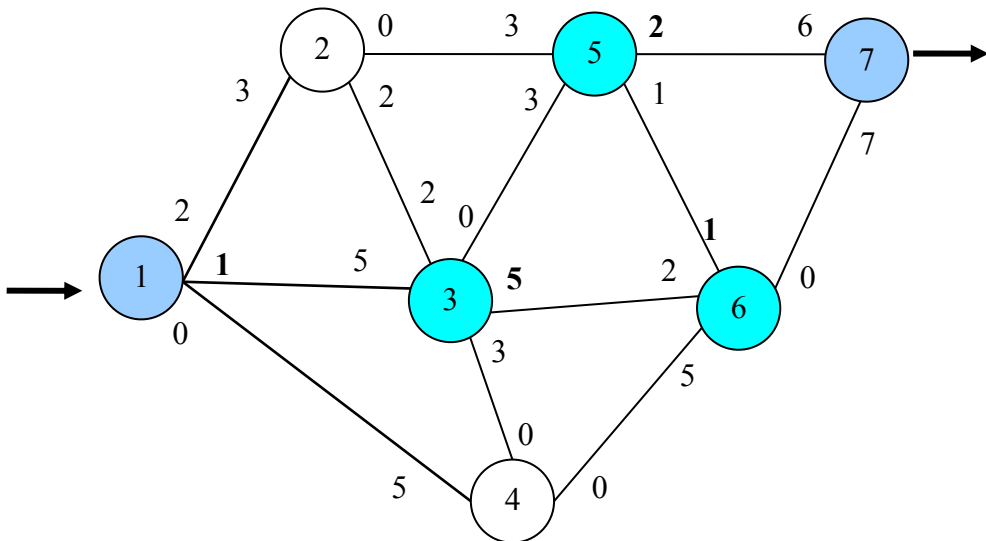
Bước lặp lần 3: Quay trở lại bước 1, chọn đường đi 1-3-6-7 với tải năng nhỏ nhất $P_f=2$. Xem Hình 3-19.

Hình 3-19: Đường đi 1-3-6-7 với $P_f=2$



Bước lặp lần 4 : Quay trở lại bước 1, chọn đường đi 1-3-6-5-7 với $P_f=1$

Hình 3-20: Đường đi 1-3-6-5-7 với $P_f=1$

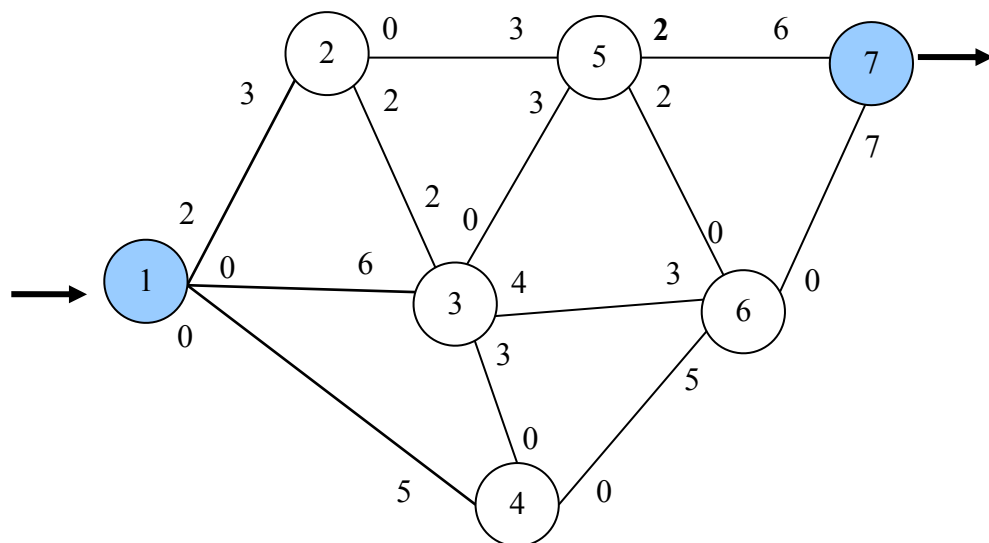


Sau bước lặp lần 4, kết quả như trên Hình 3-21. Như vậy, mạng không tồn tại bất kỳ một đường đi từ nút 1 đến nút 7 có tải năng trên dòng của các cung theo hướng đi lớn hơn 0. Phương án tối ưu đã đạt được. Chúng ta chuyển sang bước 4 của thuật toán.

Bước 4: Xác định dòng tải năng cuối cùng trên tất cả các cung.

So sánh tình trạng tải năng trên các cung ở trạng thái đầu tiên (Xem Hình 3-13) và trạng thái cuối cùng (Xem Hình 3-21), dòng cực đại cuối cùng trên tất cả các cung được xác định.

Hình 3-21: Tải năng trên dòng của các cung sau bước lặp thứ 4

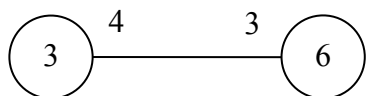


Dòng trên cung cho phương án dòng cực đại có thể tìm được bằng cách so sánh tải năng cuối cùng trên dòng của cung với tải năng ban đầu trên dòng của cung. Nếu tải năng cuối cùng trên dòng nhỏ hơn tải năng ban đầu, dòng di chuyển xảy ra trên cung với một lượng tương đương với sự khác biệt giữa tải năng ban đầu và tải năng cuối cùng trên dòng. Ví dụ, xem xét cung 3-6 với tải năng ban đầu và tải năng cuối cùng như sau.

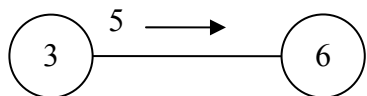
Tải năng ban đầu



Tải năng cuối cùng



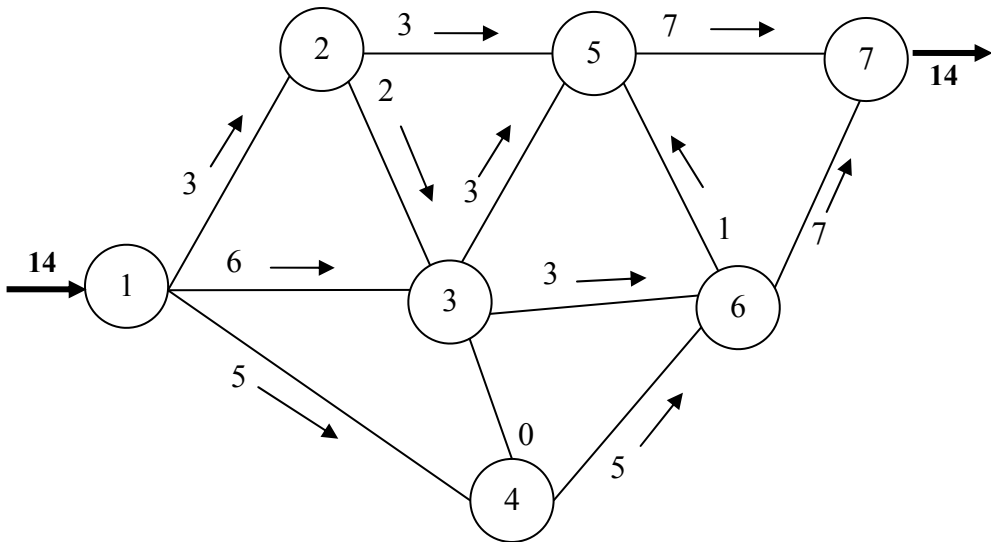
Bởi vì tải năng cuối cùng trên dòng của cung có hướng 3-6 nhỏ hơn tải năng ban đầu trên dòng, cung này có một lượng dòng $7-2=5$ theo hướng 3-6. Dòng của cung được tóm tắt như sau:



So sánh tải năng ban đầu và cuối cùng trên dòng của mỗi cung cho tất cả các cung trong mạng, chúng ta xác định mô hình dòng cuối cùng như Hình 3-22.

Kết quả của phân tích dòng cực đại cho thấy hệ thống mạng đường cao tốc theo kế hoạch không đáp ứng được dòng 1500 phương tiện vận tải/giờ vào thời gian cao điểm. Các nhà hoạch định về giao thông phải mở rộng mạng đường cao tốc, tăng tải năng hiện tại trên dòng của cung hay sẵn sàng đối phó với các vấn đề ùn tắc giao thông nghiêm trọng. Nếu mạng này được mở rộng hoặc điều chỉnh, việc phân tích dòng cực đại sẽ xác định mức độ điều chỉnh cho bất kỳ dòng nào.

Hình 3-22: Mô hình dòng cực đại của mạng hệ thống đường cao tốc



Kết quả của phân tích dòng cực đại cho thấy hệ thống mạng đường cao tốc theo kế hoạch không đáp ứng được dòng 1500 phương tiện vận tải/giờ vào thời gian cao điểm. Các nhà hoạch định về giao thông phải mở rộng mạng đường cao tốc, tăng tải năng hiện tại trên dòng của cung hay sẵn sàng đối phó với các vấn đề ùn tắc giao thông nghiêm trọng. Nếu mạng này được mở rộng hoặc điều chỉnh, việc phân tích dòng cực đại sẽ xác định mức độ điều chỉnh cho bất kỳ dòng nào.

Câu hỏi ôn tập

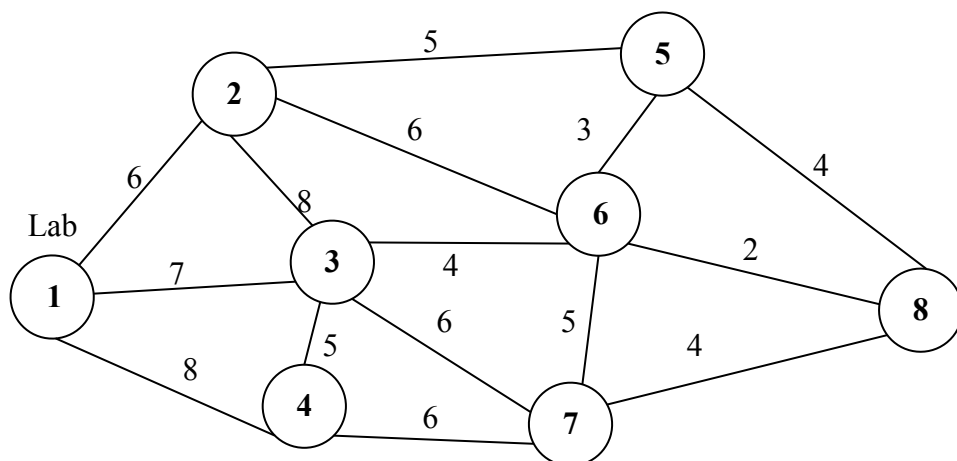
1. Thế nào là đồ thị vô hướng, có hướng? Trình bày sự khác biệt của hai loại đồ thị này.
2. Thế nào là đường đi, chu trình? Trình bày sự khác biệt giữa chúng.
3. Thế nào là cây, cây bao trùm? Phân biệt giữa chúng.

4. Thế nào là bài toán đường ngắn nhất? Nêu thuật toán giải bài toán và tìm những ứng dụng của bài toán đường ngắn nhất trong thực tế.
5. Thế nào là bài toán cây bao trùm tối thiểu? Nêu thuật toán giải bài toán và tìm những ứng dụng của bài toán cây bao trùm tối thiểu trong thực tế.
6. Thế nào là bài toán dòng cực đại? Nêu thuật toán giải bài toán và tìm những ứng dụng của bài toán dòng cực đại trong thực tế.
7. Bước đầu tiên trong thuật toán cây bao trùm tối thiểu là:
 - a. lựa chọn nút có khoảng cách dài nhất giữa nó với bất kỳ nút khác
 - b. lựa chọn nút có khoảng cách ngắn nhất giữa nó với bất kỳ nút khác
 - c. lựa chọn bất kỳ cung nào liên thông giữa hai nút
 - d. lựa chọn nút gần nhất với nút xuất phát
8. Bước đầu tiên trong thuật toán dòng cực đại là:
 - a. chọn bất kỳ đường đi có tải nặng lớn hơn không giữa hai nút
 - b. chọn đường đi có tải nặng cực đại
 - c. chọn đường đi có tải nặng cực tiểu
 - d. chọn nút bất kỳ
9. Trong thuật toán nào dưới đây, tư tưởng chính là đi tìm tập hợp các cung có tổng khoảng cách trên cung nhỏ nhất
 - a. đường ngắn nhất
 - b. cây bao trùm tối thiểu
 - c. dòng cực đại
10. Thuật toán nào dưới đây liên quan đến việc tìm nút gần nhất với nút xuất phát:
 - a. dòng cực đại
 - b. đường ngắn nhất
 - c. cây bao trùm tối thiểu

Bài tập

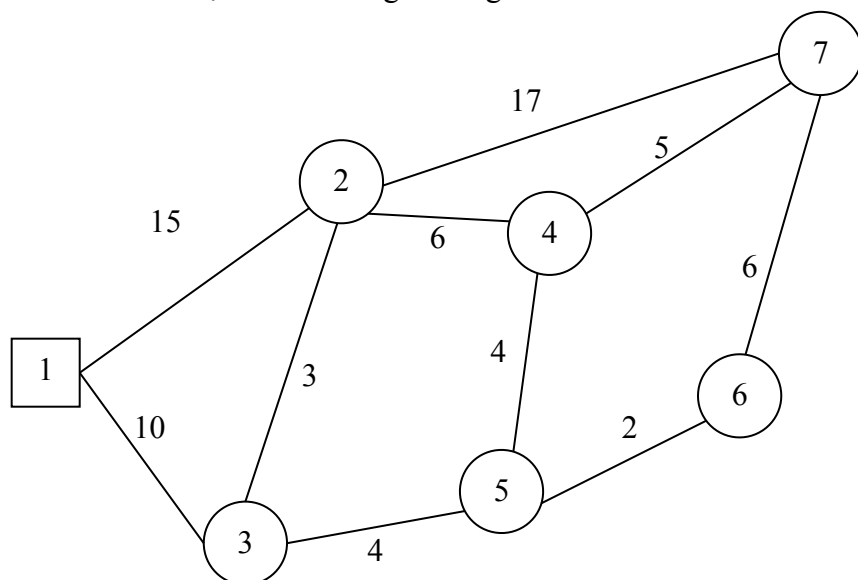
3.1. Trong một nhà máy sản xuất xà phòng, các giám định viên kiểm tra chất lượng lấy mẫu các sản phẩm khác nhau từ các khu vực sản xuất và đem về phòng thí nghiệm để phân tích. Các giám định viên đã mất thời gian đáng kể để vận chuyển các mẫu hàng từ khu vực sản xuất về phòng thí nghiệm. Công ty đang nghiên cứu lắp đặt hệ thống vận chuyển các mẫu hàng bằng ống hút để có thể chuyển chở các mẫu hàng giữa các khu vực sản xuất và phòng thí nghiệm. Sơ đồ mạng minh họa vị trí phòng thí nghiệm và các khu vực sản

nghiệm như sơ đồ sau. Chiều dài các cung tính bằng đơn vị 100 m. Hãy xác định tổng chiều dài ngắn nhất và sơ đồ hệ thống chuyên chở.

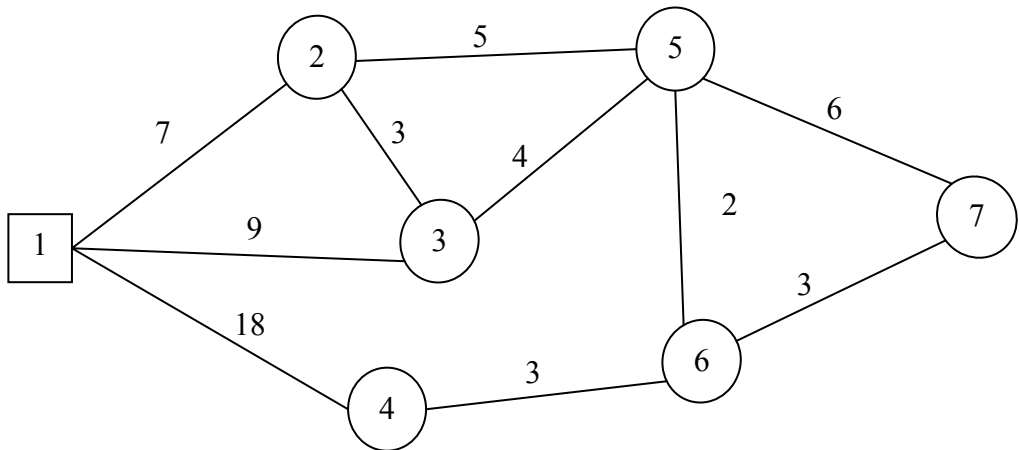


3.2. Công ty xây dựng ABC có các dự án xây dựng nằm khắp nơi trong địa bàn tỉnh. Mạng đồ thị mô tả trụ sở công ty và các công trường xây dựng được mô tả như sơ đồ sau. Biết rằng con số trên mỗi cung biểu thị khoảng cách tính bằng km giữa hai nút.

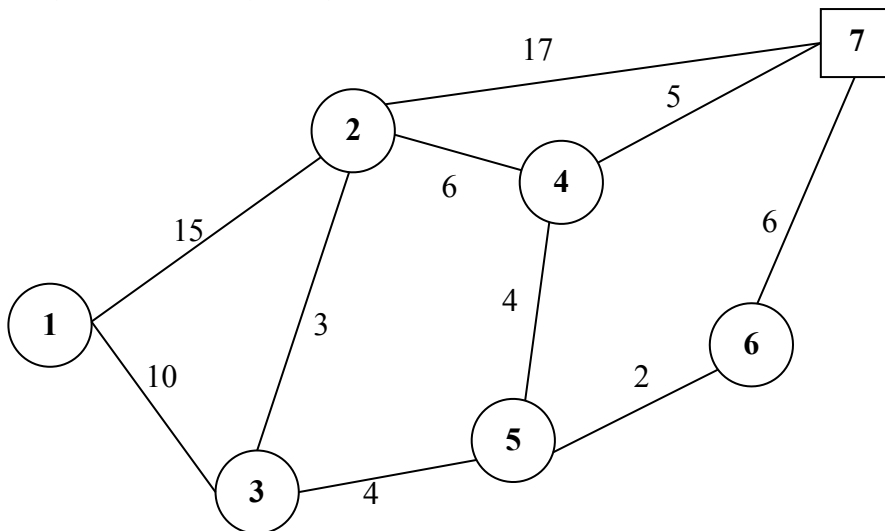
- Tìm đường ngắn nhất từ trụ sở công ty đến các công trường xây dựng.
- Nối các nút lại sao cho tổng khoảng cách nối nhỏ nhất.



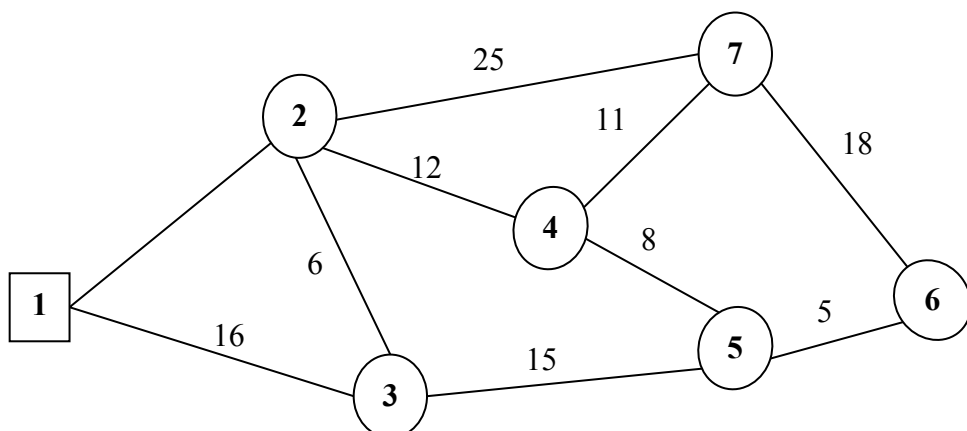
3.3. Cho mạng vận tải được mô tả như trên hình sau. Tìm đường ngắn nhất từ nút 1 đến từng nút khác trong mạng vận tải được mô tả.



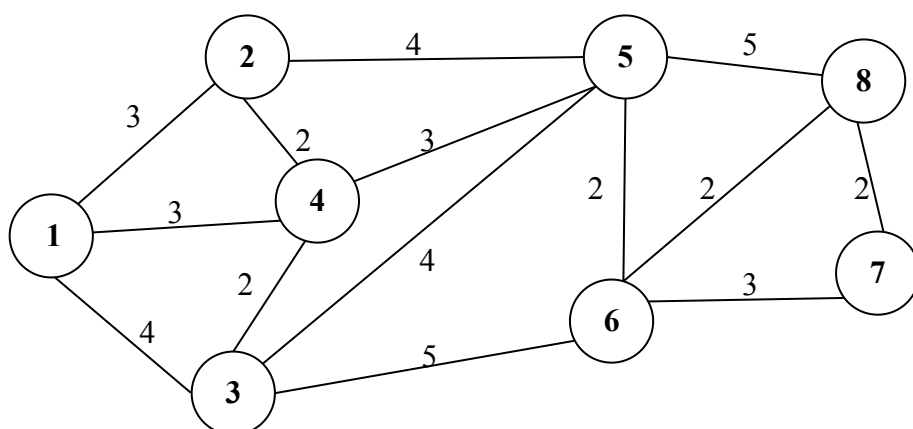
3.4. Trong bài toán của công ty xây dựng ABC, giả thiết nút 7 là trung tâm kho hàng và cung ứng của công ty. Thông thường hàng ngày có các chuyến chuyên chở thiết bị, vật tư cung ứng đến các nút khác hay công trường xây dựng. Sử dụng nút 7 là nút khởi động, tìm đường ngắn nhất từ nút này đến từng nút khác trong mạng.



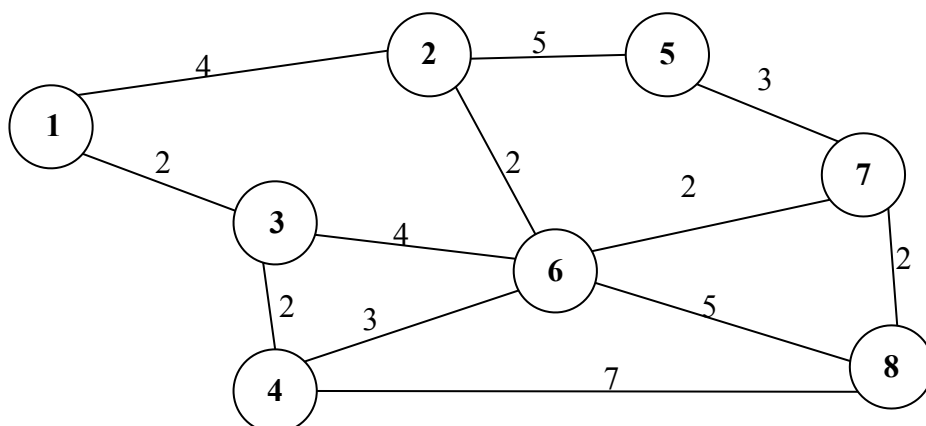
3.5. Trong bài toán công ty xây dựng ABC ban đầu, chúng ta đã tìm khoảng cách ngắn nhất từ văn phòng (nút 1) đến từng nút khác hay công trình xây dựng. Bởi vì một vài tuyến đường là đường quốc lộ và các tuyến đường khác chỉ là đường nội thị nên các tuyến đường ngắn nhất giữa văn phòng và công trường xây dựng chưa nhất thiết là các tuyến đường di chuyển có thời gian nhanh nhất. Do vậy, mạng tuyến đường di chuyển trong bài này có các thông tin về thời gian di chuyển (tính bằng phút) như sơ đồ sau. Tìm tuyến đường từ văn phòng công ty ABC đến từng công trường xây dựng nếu mục tiêu là cực tiểu thời gian di chuyển.



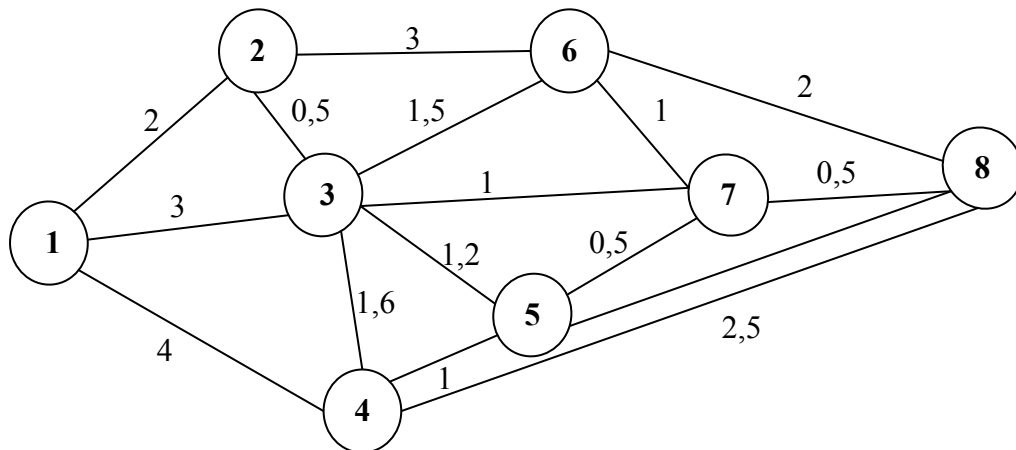
3.6. Tìm tuyến đường ngắn nhất giữa nút 1 và nút 8 trong mạng dự án như sau



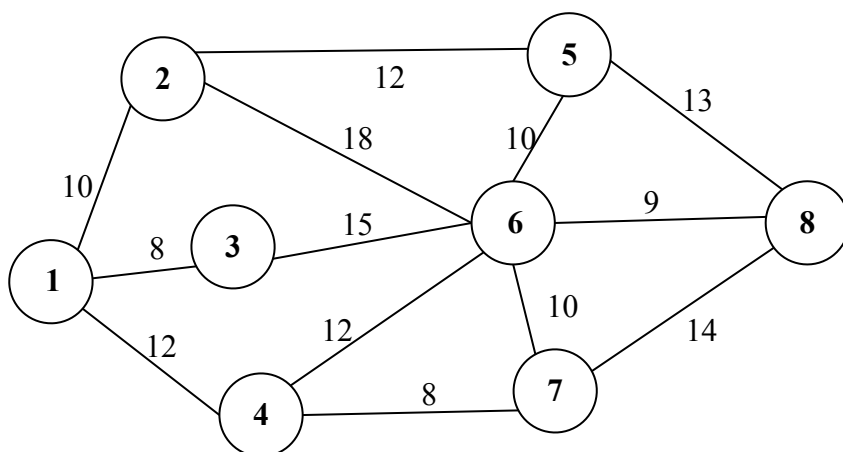
3.7. Xây dựng giải pháp cây bao trùm tối thiểu cho hệ thống thông tin cảnh báo theo sơ đồ mạng như sau (khoảng cách giữa các nút tính bằng km).



3.8. Một nhà máy đang khảo sát lắp đặt một hệ thống mạng nội bộ, liên kết các phòng ban điều hành và các phân xưởng sản xuất. Sơ đồ mạng được dùng để minh họa hệ thống mạng này, khoảng cách giữa các nút được tính bằng 100 m. Hãy đề xuất phương án thiết kế mạng để cực tiểu tổng chiều dài liên thông giữa 8 nút.

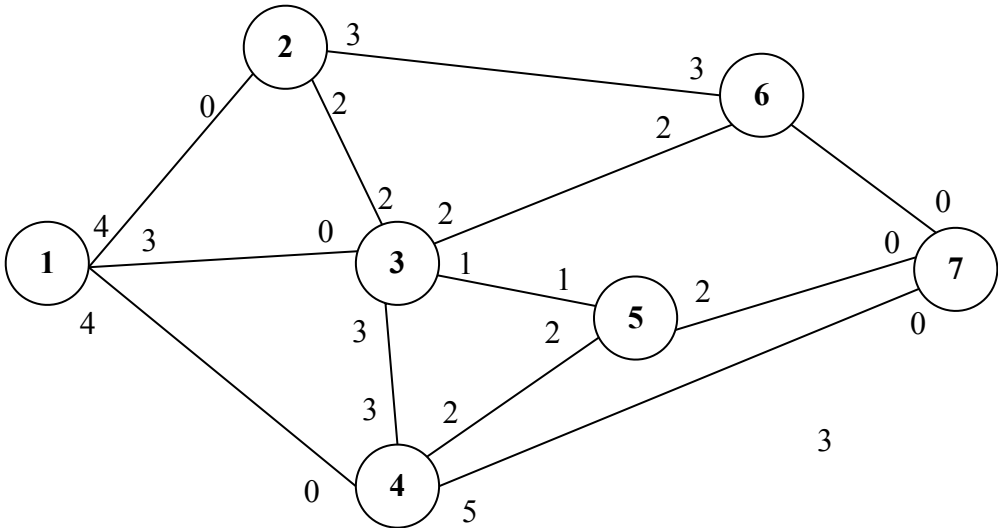


3.9. Ông A, chủ một nông trại chăn nuôi bò sữa gần khu vực Mộc Châu, lập kế hoạch lắp đặt một hệ thống cung cấp nước hoàn chỉnh liên kết tất cả các khu chuồng trại. Vị trí của các chuồng trại và khoảng cách giữa chúng được bố trí theo sơ đồ mạng (hình dưới). Ông A phải xác định cách thức lắp đặt với khoảng cách ngắn nhất để cung cấp nước cho các khu chuồng trại. Anh (chị) đề xuất giải pháp gì ?

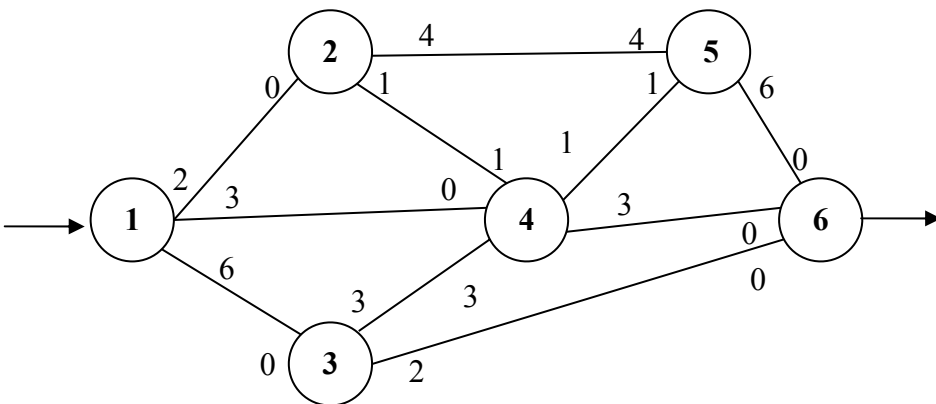


3.10. Một công ty điện thoại đường dài sử dụng một mạng cáp ngầm các đường dây viễn thông để cung cấp dịch vụ viễn thông chất lượng cao giữa hai thành phố chính (nút 1 và nút 7). Các cuộc gọi được thực hiện thông qua hàng loạt các đường dây cáp và các nút liên kết theo sơ đồ mạng dưới đây. Các con

số trên mỗi cung cho biết số lượng cuộc điện thoại có thể xuất hiện đồng thời tại bất kỳ thời điểm nào. Số lượng cuộc gọi điện thoại cực đại có thể thực hiện đồng thời giữa hai thành phố là bao nhiêu? Khi hệ thống vận hành ở mức lưu lượng cực đại, hãy cho biết các nút liên kết và đường dây cáp đang sử dụng.

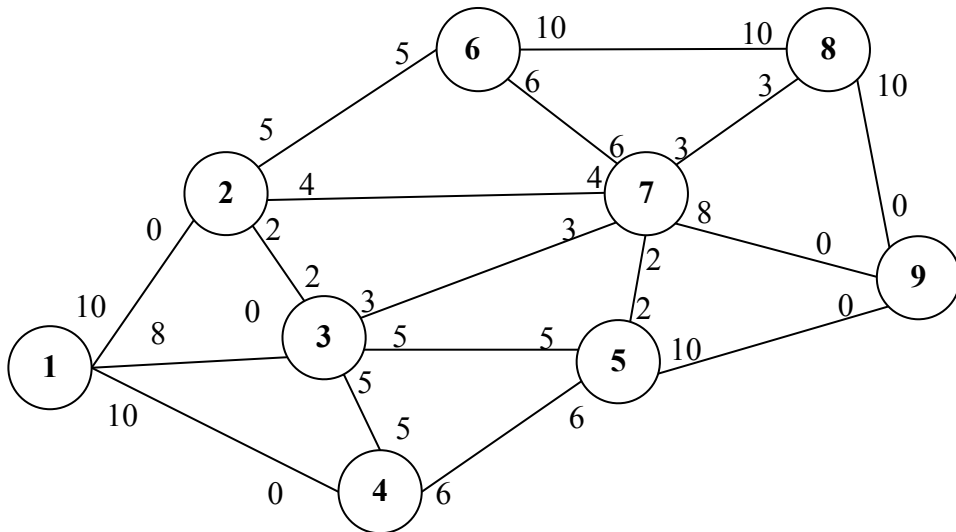


3.11. Hệ thống đường cao tốc Bắc Nam qua Albany, New York có thể đáp ứng lưu lượng vận tải được minh họa chi tiết theo sơ đồ mạng như sau. Các con số tại các cung nhất định cho biết số lượng xe ô tô tối đa (tính theo đơn vị 1000 xe/giờ). Liệu hệ thống giao thông này có thể đáp ứng lưu lượng vận tải Bắc-Nam 10000 xe/giờ

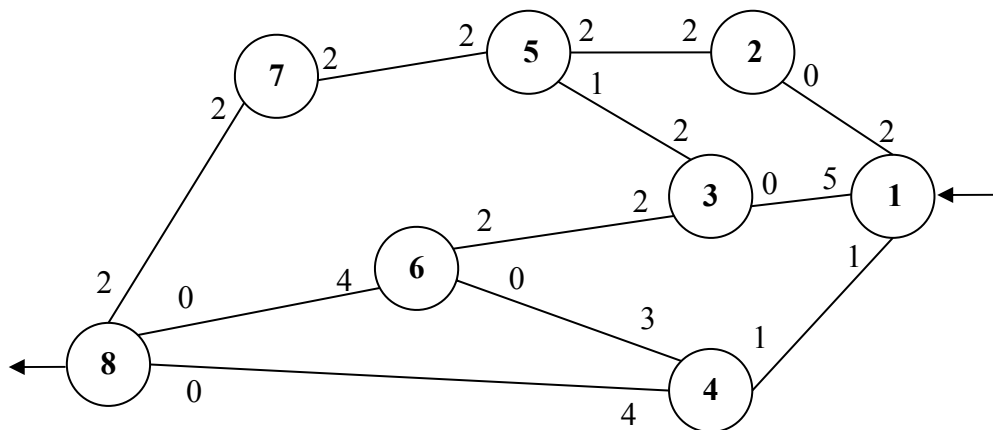


3.12. Một nhà máy sản xuất hoá chất có một mạng đường ống dùng để chuyên chở hoá chất thành phẩm dạng lỏng từ một địa điểm của nhà máy đến một địa điểm khác. Mạng đường ống cho biết tải năng trên dòng của đường ống tính theo đơn vị gallon/phút. Tải năng cực đại của hệ thống là bao nhiêu nếu nhà máy muốn vận chuyển càng nhiều càng tốt hoá chất lỏng từ địa điểm 1 đến

địa điểm 9 ? Có bao nhiêu hoá chất lỏng sẽ được chuyên chở trong đoạn ống từ địa điểm 3 đến địa điểm 5 ?



3.13. Thành phố Đà Nẵng đang xem xét hình thành một vài tuyến đường một chiều. Hãy cho biết số lượng ô tô cực đại mỗi giờ có thể di chuyển từ phía đông sang tây. Mạng lưới các tuyến đường một chiều được minh hoạ trong hình sau:



3.14. Nhờ vào việc điều chỉnh khoản tiền thuê chuyển quyền sử dụng đất và kế hoạch phát triển giao thông, Thành phố Đà Nẵng có thể nâng cao tải năng (số lượng ô tô cực đại/giờ) cho 2 tuyến đường như sơ đồ của bài 3.13. Tải năng theo đường đi từ nút 1 - nút 4 tăng từ 2 đến 5. Và tải năng từ nút 1- nút 4 tăng từ 1 đến 3. Sự thay đổi này gây ảnh hưởng như thế nào đến số lượng ô tô cực đại/giờ có thể di chuyển từ Đông sang Tây.