

CHƯƠNG 2

QUI HOẠCH TUYẾN TÍNH

Mục tiêu chương

Sau khi hoàn thành chương này, sinh viên có thể:

1. Nắm được những thành phần và các dạng khác nhau của bài toán qui hoạch tuyến tính;
2. Có thể thực hiện chuyển đổi giữa các dạng bài toán qui hoạch tuyến tính;
3. Xây dựng bài toán qui hoạch tuyến tính **đơn giản** trong kinh tế;
4. Nắm được các phương pháp giải các bài toán qui hoạch tuyến tính;
5. Hiểu được bài toán đối ngẫu và thực hiện biến đổi giữa bài toán đối ngẫu và bài toán gốc;
6. Hiểu và sử dụng phân tích độ nhạy trong phân tích;
7. Hiểu và ứng dụng của các bài toán qui hoạch nguyên trong kinh tế;
8. Sử dụng được các phần mềm phổ biến để giải các bài toán qui hoạch tuyến tính khác nhau;
9. Đọc và phân tích được nội dung kết xuất của các phần mềm phổ biến về các bài toán qui hoạch tuyến tính.

Nội dung chương

- 2.1. Đặt vấn đề
- 2.2. Những dạng bài toán qui hoạch
- 2.3. Biến đổi dạng của bài toán qui hoạch
- 2.4. Những phương pháp giải bài toán qui hoạch tuyến tính
- 2.5. Bài toán đối ngẫu
- 2.6. Phân tích độ nhạy
- 2.7. Qui hoạch nguyên

2.1. Đặt vấn đề

Qui hoạch tuyến tính là một phương pháp được sử dụng **rất phổ biến** nhằm hỗ trợ cho nhà quản trị ra quyết định. Trong thực tế, qui hoạch tuyến tính được sử dụng để giải quyết những bài toán như sau:

1. Nhà sản xuất muốn xây dựng **tiến độ sản xuất và chính sách dự trữ nhằm đảm bảo nhu cầu bán trong tương lai. Tiến độ và chính sách dự trữ đảm bảo cho công ty cung cấp hàng hoá với chi phí sản xuất và dự trữ thấp nhất.**
2. Các nhà phân tích tài chính phải **chọn danh mục đầu tư sao cho lợi nhuận thu được từ đầu tư là cực đại.**
3. Nhà quản trị marketing muốn phân phối quỹ quảng cáo cho những phương tiện quảng cáo như radio, television, báo, tạp chí. Nhà quản trị muốn **lựa chọn phương tiện quảng cáo sao cho hiệu quả quảng cáo là lớn nhất.**
4. Một công ty có một số kho ở vài nơi. Với nhu cầu của khách hàng đã xác định, công ty muốn xác định từ mỗi kho, chúng ta sẽ **vận chuyển bao nhiêu hàng đến từng khách hàng sao cho tổng chi phí vận chuyển là nhỏ nhất...**

Những ví dụ này chỉ **là một vài tình huống mà qui hoạch tuyến tính được sử dụng thành công, nhưng chúng minh họa tính đa dạng của những ứng dụng của qui hoạch tuyến tính. Quan sát kỹ, các bài toán này có những đặc trưng chung. Trong mỗi ví dụ, chúng ta quan tâm đến cực đại hay cực tiểu một vài đại lượng. Trong ví dụ 1, nhà sản xuất muốn cực tiểu chi phí; trong ví dụ 2, nhà phân tích tài chính muốn cực đại lợi nhuận từ đầu tư; trong ví dụ 3, nhà quản trị muốn cực đại hiệu quả quảng cáo; và trong ví dụ 4, công ty muốn cực tiểu chi phí vận chuyển. Trong tất cả các bài toán qui hoạch tuyến tính, mục tiêu của chúng ta là cực đại và cực tiểu một vài đại lượng.**

Tất cả các bài toán qui hoạch tuyến tính đều có đặc trưng là những ràng buộc. Trong ví dụ 1, nhà sản xuất bị ràng buộc bởi số lượng sản phẩm sản xuất và năng lực sản xuất. Bài toán cơ cấu đầu tư bị ràng buộc bởi quỹ đầu tư. Quyết định lựa chọn phương tiện quảng cáo bị ràng buộc bởi ngân sách và tính khả thi của phương tiện quảng cáo. Trong bài toán vận tải, cực tiểu chi phí bị ràng buộc bởi khả năng cung cấp hàng hoá của mỗi kho. Chính vì vậy, ràng buộc là đặc trưng chung thứ hai của mỗi bài toán qui hoạch tuyến tính.

2.1.1. Bài toán cực đại đơn giản

ABC là công ty nhỏ chuyên sản xuất sản phẩm hoá chất. Trong quá trình sản xuất, công ty sử dụng 3 nguyên liệu để sản xuất chất phụ gia và bazơ hoà tan. Chất phụ gia được bán cho một công ty dầu mỏ và được dùng để sản xuất dầu

hoà và nhiều liệu liên quan khác. Bazơ hoà tan được bán cho các công ty hoá chất khác và được dùng để sản xuất sản phẩm lau chùi công nghiệp và gia dụng. Ba nguyên liệu thô được pha trộn thành chất phụ gia và bazơ hoà tan như trên Bảng 2-1. Nó thể hiện một tấn chất phụ gia là hỗn hợp của 0,4 tấn nguyên liệu loại 1 và 0,6 tấn nguyên liệu loại 3. Một tấn bazơ hoà tan là hỗn hợp 0,5 tấn nguyên liệu loại 1; 0,2 tấn nguyên liệu loại 2 và 0,3 tấn nguyên liệu loại 3.

Bảng 2-1: Nhu cầu nguyên liệu cho mỗi tấn sản phẩm

Nguyên liệu	Sản phẩm	
	Chất phụ gia	Bazơ hoà tan
Nguyên liệu 1	0,4	0,5
Nguyên liệu 2		0,2
Nguyên liệu 3	0,6	0,3

Việc sản xuất của ABC bị ràng buộc bởi khả năng bị giới hạn của ba nguyên liệu. Với giai đoạn sản xuất hiện tại, ABC có khả năng cung ứng về lượng của mỗi nguyên liệu sau: Nguyên liệu 1, 2 và 3 chỉ được cung ứng tương ứng là 20 tấn, 5 tấn và 21 tấn.

Bộ phận kế toán đã phân tích số liệu, xác định tất cả các khoản chi phí có liên quan, giá bán cho mỗi sản phẩm và tính được lợi nhuận đạt được của mỗi tấn chất phụ gia, bazơ hoà tan tương ứng là 40 ngàn đồng và 30 ngàn đồng. Bây giờ, chúng ta hãy dùng qui hoạch tuyến tính xác định số tấn chất phụ gia và số tấn bazơ hoà tan cần sản xuất để cực đại lợi nhuận.

Xây dựng bài toán (Problem formulation) là quá trình chuyển mệnh đề bằng lời của bài toán sang mệnh đề toán. Mệnh đề toán của bài toán được mô tả bằng các mô hình toán (**mathematical model**). Phát triển một mô hình toán thích hợp là một nghệ thuật mà chỉ có thể tinh thông thực tế và kinh nghiệm mới có thể thực hiện được. Mặc dù mỗi bài toán có ít nhất một vài đặc trưng riêng nhưng cũng có những đặc trưng chung hoặc tương tự. Chúng ta sẽ xây dựng mô hình toán cho bài toán ABC và dựa vào đó sẽ phát triển thành bài toán tổng quát.

Vấn đề đầu tiên khi xây dựng bài toán là hiểu bài toán một cách thấu đáo bài toán. ABC muốn xác định mỗi loại sản phẩm phải được sản xuất bao nhiêu để cực đại lợi nhuận. Số tấn có được của 3 nguyên liệu để sản xuất 2 loại sản phẩm sẽ giới hạn số tấn của mỗi sản phẩm được sản xuất. Những bài toán phức tạp hơn đòi hỏi phải suy nghĩ nhiều để có thể hiểu được. Tuy nhiên, hiểu bài toán một cách thấu đáo là bước đầu tiên nhưng rất quan trọng trong việc xây dựng mô hình toán. Khi đã hiểu được bài toán, chúng ta xác định những thành phần khác nhau của bài toán.

Mô tả hàm mục tiêu (objective function): Mục tiêu của ABC là cực đại tổng lợi nhuận.

Mô tả các ràng buộc (constraints): Ba ràng buộc giới hạn số tấn chất phụ gia và bazơ hoà tan được sản xuất chính là nguồn nguyên liệu có giới hạn của công ty.

Ràng buộc 1: Số tấn nguyên liệu 1 được dùng phải nhỏ hơn hoặc bằng 20 tấn.

Ràng buộc 2: Số tấn nguyên liệu 2 được dùng phải nhỏ hơn hoặc bằng 5 tấn.

Ràng buộc 3: Số tấn nguyên liệu 3 được dùng phải nhỏ hơn hoặc bằng 21 tấn.

Xác định biến quyết định (Decision Variables): Đối với bài toán ABC có 2 biến quyết định: (1) số tấn chất phụ gia được sản xuất và (2) số tấn bazơ hoà tan được sản xuất. Trong việc xây dựng mô hình toán đối với bài toán ABC, chúng ta sẽ dùng những ký hiệu sau đối với biến quyết định:

F = số tấn chất phụ gia được sản xuất

B = số tấn bazơ hoà tan được sản xuất

Viết hàm mục tiêu theo các biến quyết định: Lợi nhuận của ABC do sản xuất F tấn chất phụ gia và B tấn bazơ hoà tan. Vì ABC tạo 40 ngàn đồng lợi nhuận cho mỗi tấn chất phụ gia và 30 ngàn đồng lợi nhuận cho mỗi tấn bazơ hoà tan được sản xuất, công ty sẽ tạo $40F$ lợi nhuận do sản xuất chất phụ gia và $30B$ lợi nhuận do sản xuất bazơ hoà tan. Chính vì vậy, tổng lợi nhuận sẽ là $40F + 30B$.

Vì hàm mục tiêu là hàm của các biến quyết định F và B , nên hàm mục tiêu là $40F + 30B$. Dùng “Max” ký hiệu cho cực đại, chúng ta có thể viết mục tiêu của bài toán ABC như sau: Max $40F + 30B$.

Viết các ràng buộc theo các biến quyết định: nguồn nguyên liệu của công ty là có hạn nên khi xây dựng bài toán cần quan tâm đến nó.

Ràng buộc 1: Số tấn nguyên liệu 1 được dùng phải không vượt số tấn nguyên liệu 1 khả dụng.

Mỗi tấn chất phụ gia mà ABC sản xuất sẽ dùng 0,4 tấn nguyên liệu 1. Vì vậy, $0,4F$ tấn nguyên liệu 1 được dùng để sản xuất F tấn chất phụ gia. Tương tự, mỗi tấn bazơ hoà tan mà ABC sản xuất sẽ dùng 0,5 tấn nguyên liệu 1. Vì vậy, $0,5B$ tấn nguyên liệu 1 được dùng để sản xuất B tấn bazơ hoà tan. Vì thế, số tấn nguyên liệu 1 được dùng để sản xuất F tấn chất phụ gia và B tấn bazơ hoà tan là: $0,4F + 0,5B$. Vì chỉ có 20 tấn nguyên liệu 1 dùng để sản xuất, nên mệnh đề của ràng buộc 1 là $0,4F + 0,5B \leq 20$.

Ràng buộc 2: Số tấn nguyên liệu 2 được dùng phải không vượt số tấn nguyên liệu 2 khả dụng.

Chất phụ gia không cần dùng nguyên liệu 2. Tuy nhiên, mỗi tấn bazơ hoà tan

mà ABC sản xuất sẽ dùng 0,2 tấn nguyên liệu 2. Vì vậy, 0,2B tấn nguyên liệu 2 được dùng để sản xuất B tấn bazơ hoà tan. Vì thế, số tấn nguyên liệu 2 được dùng để sản xuất F tấn chất phụ gia và B tấn bazơ hoà tan là 0,2B. Vì chỉ có 5 tấn nguyên liệu 2 dùng để sản xuất, nên mệnh đề của ràng buộc 2 là $0,2B \leq 5$.

Ràng buộc 3: Số tấn nguyên liệu 3 được dùng phải không vượt số tấn của nguyên liệu 3 khả dụng.

Mỗi tấn chất phụ gia mà ABC sản xuất sẽ dùng 0,6 tấn nguyên liệu 3. Vì vậy, 0,6F tấn nguyên liệu 3 được dùng để sản xuất F tấn chất phụ gia. Tương tự, mỗi tấn bazơ hoà tan mà công ty ABC sản xuất sẽ dùng 0,3 tấn nguyên liệu 3. Vì vậy, 0,3B tấn nguyên liệu 3 được dùng để sản xuất B tấn bazơ hoà tan. Vì thế, số tấn nguyên liệu 3 được dùng để sản xuất F tấn chất phụ gia và B tấn bazơ hoà tan là $0,6F + 0,3B$. Vì chỉ có 21 tấn nguyên liệu 3 có thể dùng cho sản xuất nên mệnh đề toán của ràng buộc 3 là $0,6F + 0,3B \leq 21$.

Những ràng buộc không âm: Số tấn sản xuất chất phụ gia hoặc bazơ hoà tan không thể âm. Vì thế, các ràng buộc không âm phải được thêm vào để ngăn chặn các biến quyết định F và B nhận giá trị âm. Những ràng buộc này là: $F \geq 0$ và $B \geq 0$.

Trong các bài toán kinh tế, các ràng buộc không âm của các biến quyết định là đặc điểm chung của các bài toán qui hoạch tuyến tính và được viết theo dạng ngắn gọn như sau: $F, B \geq 0$

Mô hình toán của bài toán ABC: Xây dựng bài toán đã hoàn thành và chúng ta đã thành công trong việc chuyển mệnh đề bằng lời của bài toán sang mô hình toán học như sau:

$$\text{Max } 40F + 30B$$

Ràng buộc

$$0,4F + 0,5B \leq 20 \quad \text{Nguyên liệu 1}$$

$$0,2B \leq 5 \quad \text{Nguyên liệu 2}$$

$$0,6F + 0,3B \leq 21 \quad \text{Nguyên liệu 3}$$

$$F, B \geq 0$$

Nhiệm vụ của chúng ta bây giờ là tìm một tập hợp số lượng các sản phẩm đảm bảo thỏa mãn tất cả các ràng buộc và đồng thời hàm mục tiêu đạt được giá trị cực đại. Một khi những giá trị này của các biến F và B đã được tính toán, chúng ta sẽ tìm được phương án tối ưu cho bài toán.

Mô hình toán học của bài toán ABC là bài toán qui hoạch tuyến tính. Bài toán có hàm mục tiêu và các ràng buộc đều là hàm tuyến tính của các biến quyết định F và B.

Hàm toán học mà trong đó mỗi biến xuất hiện riêng biệt có bậc 1 được gọi là hàm tuyến tính. Hàm mục tiêu ($40F + 30B$) là tuyến tính vì mỗi biến quyết định có bậc 1. Lượng nguyên liệu 1 được dùng ($0,4F + 0,5B$) cũng là hàm tuyến tính của biến quyết định. Tương tự, hàm bên trái của ràng buộc bất phương về nguyên liệu 2 và nguyên liệu 3 (gọi là các hàm ràng buộc) cũng là hàm tuyến tính theo các biến quyết định.

2.1.2. Bài toán cực tiểu đơn giản

Công ty hoá chất MDC sản xuất hai sản phẩm A và B để bán làm nguyên liệu cho các công ty sản xuất xà phòng. Dựa trên mức tồn kho hiện tại và nhu cầu tiềm năng cho tháng tới, các nhà quản trị xác định tổng mức sản xuất trong tháng tới của cả hai sản phẩm ít nhất 350 galông¹. Riêng sản phẩm A phải được sản xuất ít nhất 125 galông. Để sản xuất mỗi galông sản phẩm A, B tương ứng hết 2 giờ và 1 giờ. Trong tháng đến, tổng quỹ thời gian là 600 giờ. Mục tiêu của công ty MDC là cực tiểu tổng chi phí sản xuất. Chi phí sản xuất mỗi galông sản phẩm A và B tương ứng là 2 và 3 ngàn đồng.

Để cực tiểu chi phí, chúng ta xây dựng bài toán qui hoạch tuyến tính. Thủ tục xây dựng bài toán tương tự như xây dựng bài toán của công ty ABC, trước tiên phải xác định biến quyết định và hàm mục tiêu của bài toán.

Gọi:

A = số galông sản phẩm A được sản xuất,

B = số galông sản phẩm B được sản xuất.

Vì chi phí cho mỗi galông sản phẩm A và B tương ứng là 2 và 3 ngàn đồng, hàm mục tiêu sẽ cực tiểu tổng chi phí sản xuất và được viết như sau:

$$\text{Min } 2A + 3B.$$

Tiếp theo, chúng ta xác định các ràng buộc của bài toán. Để đảm bảo nhu cầu của khách hàng ít nhất 125 galông sản phẩm A, chúng ta viết ràng buộc:

$$1A \geq 125$$

Vì tổng sản phẩm sản xuất của cả hai sản phẩm phải ít nhất 350 galông nên có ràng buộc như sau:

$$1A + 1B \geq 350$$

Đối với giới hạn năng lực sản xuất là 600 giờ, chúng ta có:

$$2A + 1B \leq 600$$

Sau cùng, chúng ta cần thêm ràng buộc không âm ($A, B \geq 0$). Như vậy, bài toán qui hoạch tuyến tính cho bài toán MDC được mô tả như sau:

¹ Đơn vị đo lường chất lỏng bằng 4,54 lít ở Anh và 3,78 lít ở Mỹ

$$\text{Min} \quad (2A + 3B)$$

Ràng buộc

$$\begin{array}{rclcl} 1A & & \geq & 125 & \text{Nhu cầu của sản phẩm A} \\ 1A + 1B & \geq & 350 & & \text{Tổng sản phẩm} \\ 2A + 1B & \leq & 600 & & \text{Thời gian sản xuất} \\ A, B & \geq & 0 & & \end{array}$$

2.1.3. Những ký hiệu chung của bài toán qui hoạch tuyến tính

Trong chương này, chúng ta đã biểu diễn mô hình toán của bài toán qui hoạch tuyến tính của công ty ABC và MDC. Để xây dựng mô hình toán của bài toán ABC, chúng ta xác định hai biến quyết định: F là số tấn của chất phụ gia và B là số tấn của bazơ hoà tan. Trong bài toán MDC, hai biến quyết định được ký hiệu: A là số galông sản phẩm A và B là số galông của sản phẩm B. Chọn tên biến quyết định theo cách này để dễ hình dung các biến quyết định. Nhưng cách này sẽ tốt cho những bài toán có ít biến quyết định và nó sẽ khó khăn khi bài toán có nhiều biến. Chúng ta cần phải mô tả các biến khái quát hơn. Ký hiệu chung thường được sử dụng trong các bài toán qui hoạch tuyến tính là x với những chỉ số dưới.

Trong bài toán ABC, chúng ta có thể ký hiệu những biến quyết định như sau: x_1 = số tấn chất phụ gia được sản xuất và x_2 = số tấn chất bazơ hoà tan được sản xuất.

Khi đó, mô hình sẽ là:

$$\text{Max} \quad (40x_1 + 30x_2)$$

Ràng buộc

$$\begin{array}{rclcl} 0,4x_1 + 0,5x_2 & \leq & 20 & \text{Nguyên liệu 1} \\ 0,2x_2 & \leq & 5 & \text{Nguyên liệu 2} \\ 0,6x_1 + 0,3x_2 & \leq & 21 & \text{Nguyên liệu 3} \\ x_1, x_2 & \geq & 0 & \end{array}$$

Tương tự, trong bài toán MDC, tên biến được ký hiệu như sau: x_1 = số galông sản phẩm A được sản xuất và x_2 = số galông sản phẩm B được sản xuất.

Như vậy, mô hình toán sẽ là:

$$\text{Min} \quad 2x_1 + 3x_2$$

Ràng buộc

$$\begin{array}{rclcl} 1x_1 & \geq & 125 & \text{Nhu cầu của sản phẩm A} \\ 1x_1 + 1x_2 & \geq & 350 & \text{Nhu cầu tổng các sản phẩm} \\ 2x_1 + 1x_2 & \leq & 600 & \text{Thời gian sản xuất} \\ x_1, x_2 & \geq & 0 & \end{array}$$

2.2. Những dạng bài toán qui hoạch

2.2.1. Những thành phần của bài toán

Như vậy, bài toán qui hoạch tuyến tính bao gồm những thành phần cơ bản như sau:

Hàm mục tiêu: đây là hàm toán học của các biến quyết định và có thể đạt cực trị. Thông thường, trong kinh tế hàm mục tiêu thể hiện cực đại về kết quả và cực tiểu về chi phí.

Các ràng buộc: là những phương trình hay bất phương trình tuyến tính thể hiện sự kết hợp các biến quyết định. Trong kinh tế, các ràng buộc thể hiện sự hạn chế về nguồn lực.

Các ràng buộc về dấu của các biến quyết định: các biến quyết định của những bài toán trong kinh tế thường không âm. Tuy nhiên, trong trường hợp tổng quát, các biến có thể nhận giá trị âm.

2.2.2. Các dạng bài toán qui hoạch tuyến tính

Qua nghiên cứu các bài toán qui hoạch tuyến tính, chúng ta có thể khái quát các bài toán qui hoạch tuyến tính gồm các dạng cơ bản: dạng tổng quát, dạng chính tắc và dạng chuẩn. Mỗi dạng có những đặc trưng riêng và có cách giải riêng. Trong đó dạng chuẩn sẽ là cơ sở cho phương pháp đơn hình. Nắm vững từng loại để có thể chuyển đổi giữa các loại.

Dạng tổng quát: Đây là dạng gặp rất nhiều trong thực tế, cụ thể bài toán dạng này có các thành phần như sau:

Hàm mục tiêu

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min(\max) \text{ hay } \text{Min}(\text{Max}) \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

Ràng buộc

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i & i \in I_1 \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i & i \in I_2 \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i & i \in I_3 \end{cases}$$

Trong đó: $I_1 \cup I_2 \cup I_3 = \{1, 2, \dots, m\}$

Ràng buộc dấu

$$x_j \geq 0 \ (j \in J_1); \ x_j \leq 0 \ (j \in J_2); \ x_j \text{ tùy ý } (j \in J_3)$$

Trong đó: $J_1 \cup J_2 \cup J_3 = \{1, 2, \dots, n\}$

⊙ Ví dụ: Bài toán sau có dạng tổng quát:

$$\text{Max } (3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5)$$

S.t.

$$2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 \leq 17$$

$$4x_1 - 2x_2 + x_3 = 20$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 \geq -18$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 100$$

$$x_1, x_4 \geq 0; x_2, x_5 \leq 0; x_3 \text{ tùy ý}$$

Dạng chính tắc

Bài toán dạng chính tắc là bài toán có những đặc trưng cơ bản sau:

- Các ràng buộc đều là phương trình,
- Các biến số đều không âm,
- Vế phải có thể nhận giá trị bất kỳ.

Bài toán dạng chính tắc còn được mô tả theo ký hiệu ma trận như sau:

$$\text{Min (Max) } cx^T$$

Ràng buộc

$$Ax^T = b$$

$$x \geq 0$$

Với

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$b^T = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_m)$ véc tơ các số hạng tự do (vế phải) của hệ ràng buộc

$x = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)$ véc tơ các biến quyết định

$c = (c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n)$ véc tơ các hệ số của hàm mục tiêu.

⊙ Ví dụ: Bài toán sau có dạng có dạng chính tắc

Hàm mục tiêu

$$\text{Min } (3x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5)$$

Ràng buộc

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 &= 20 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 &= -18 \end{aligned}$$

Ràng buộc dấu

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Dạng chuẩn

Hàm mục tiêu

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min (\max)$$

Ràng buộc

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & & + & a_{1(m+1)} x_{(m+1)} & + & \dots & + & a_{1n} x_n & = & b_1 \\ & x_2 & & + & a_{2(m+1)} x_{(m+1)} & + & \dots & + & a_{2n} x_n & = & b_2 \\ & & \ddots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ & & & x_m & + & a_{m(m+1)} x_{(m+1)} & + & \dots & + & a_{mn} x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

Ràng buộc dấu

$$x_j \geq 0 \quad \forall j = \overline{1, n} \quad \text{và} \quad b_i \geq 0 \quad \forall i = \overline{1, m}$$

Bài toán dạng chuẩn còn được mô tả theo ký hiệu ma trận như sau:

$$\text{Min (Max)} \quad cx^T$$

Ràng buộc

$$Ax^T = b$$

$$x \geq 0$$

Với

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a_{1(m+1)} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{2(m+1)} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{m(m+1)} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

△ Nhận xét: Bài toán dạng chuẩn là dạng bài toán dạng chính tắc có thêm các điều kiện, đó là:

- Các số hạng tự do không âm (các số hạng ở vế phải không âm) ;
 - Ma trận các hệ số các ràng buộc A có chứa một ma trận đơn vị cấp m.
- Nói cách khác, hệ các ràng buộc là hệ phương trình chuẩn.

⊙ Ví dụ: Bài toán sau có dạng chuẩn

$$\text{Min } (3x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5)$$

Ràng buộc

$$2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 10$$

$$2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_6 = 20$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 18$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Các biến ứng với các véc tơ cột đơn vị trong ma trận A được gọi là các biến cơ bản. Biến cơ bản ứng với véc tơ đơn vị thứ i gọi là biến cơ bản thứ i. Các biến còn lại là các biến không cơ bản.

Một tập các giá trị của các biến thoả mãn những ràng buộc của bài toán gọi là phương án của bài toán.

Một phương án mà các biến không cơ bản bằng 0 gọi là phương án cơ bản..

Một phương án cơ bản có đủ m thành phần dương gọi là không suy biến. Nếu có ít hơn m thành phần dương gọi là suy biến.

△ Nhận xét: với bài toán dạng chuẩn, luôn có phương án cơ bản ban đầu:

$$x_j = \begin{cases} b_j & \forall j = \overline{1, m} \\ 0 & \forall j = \overline{m+1, n} \end{cases}$$

$$\text{Tức là } x^T = (x_1 \ x_2 \dots x_m \ x_{m+1} \dots x_n) = (b_1 \ b_2 \dots b_m \ 0 \dots 0)$$

2.2.3. Biến đổi dạng của bài toán qui hoạch

Như đã nêu, bài toán qui hoạch tuyến tính tồn tại dưới nhiều dạng khác nhau. Tuy nhiên, trong một số phương pháp giải bài toán đòi hỏi bài toán có dạng nhất định. Vì vậy, chúng ta phải thực hiện biến đổi bài toán từ dạng này sang dạng khác.

a. Dưa dạng tổng quát về dạng chính tắc

Để đưa bài toán dạng tổng quát về dạng chính tắc, chúng ta có thể thực hiện những biến đổi sau:

1. Nếu ràng buộc dạng $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i$ chúng ta cộng thêm vào vế trái một biến phụ không âm $x_{n+1} \geq 0$ để chuyển ràng buộc về dạng phương trình $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + x_{n+1} = b_i$
2. Nếu gặp ràng buộc dạng $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i$ chúng ta trừ ra ở vế trái một

biến phụ không âm $x_{n+1} \geq 0$ để chuyển ràng buộc thành phương trình

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - x_{n+1} = b_i.$$

△ Chú ý: các biến phụ là những biến giúp chúng ta biến đổi các ràng buộc dạng bất phương trình thành phương trình, chứ không đóng vai trò gì về mặt kinh tế, nên nó không ảnh hưởng đến hàm mục tiêu. Vì vậy, hệ số của biến phụ trong hàm mục tiêu bằng 0.

3. Nếu gặp biến $x_j \leq 0$, chúng ta thay $x_j = -t_j$ với $t_j \geq 0$

4. Nếu gặp biến x_j tùy ý, chúng ta thay $x_j = x'_j - x''_j$ với $x'_j \geq 0$ và $x''_j \geq 0$.

⊙ Ví dụ: Đưa bài toán sau về dạng chính tắc:

$$\text{Min } (3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5)$$

Ràng buộc

$$2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 \leq 17$$

$$4x_1 - 2x_2 + x_3 = 20$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 \geq -18$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 100$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0; x_4 \leq 0; x_5 \text{ tùy ý.}$$

△ Nhận xét: - Ràng buộc 1, 3, 4 là những bất phương trình

$$-x_4 \leq 0, x_5 \text{ tùy ý.}$$

Chúng ta thêm biến phụ x_6, x_7, x_8 vào ràng buộc 1, 3 và 4; thay $x_4 = -t_4$ và $x_5 = x'_5 - x''_5$.

Như vậy, chúng ta được bài toán dạng chính tắc như sau:

$$\text{Min } (3x_1 - x_2 + 2x_3 - t_4 + 5x'_5 - 5x''_5)$$

Ràng buộc

$$2x_1 - 2x_2 + x_3 - 2t_4 + x'_5 - x''_5 + x_6 = 17$$

$$4x_1 - 2x_2 + x_3 = 20$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 - x''_5 - x_7 = -18$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 - t_4 + x_8 = 100$$

Ràng buộc đầu

$$x_1, x_2, x_3, t_4, x'_5, x''_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0$$

b. Đưa dạng chính tắc về dạng chuẩn

Trước tiên, nếu trong bài toán dạng chính tắc, có một số hạng ở vế phải nào âm, chúng ta chỉ cần đổi dấu hai vế để được $b_i > 0$. Vậy, từ đây chúng ta có thể

giả thiết bài toán dạng chính tắc đang xét có $b_i \geq 0$ ($i = \overline{1, m}$), tức về phải của bài toán không âm.

Xem xét bài toán dạng chính tắc như sau:

Hàm mục tiêu

$$\text{Min}(\text{Max}) \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

Ràng buộc

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (\forall j = \overline{1, n})$$

Chúng ta thêm vào mỗi phương trình một biến giả (Artificial variable) không âm $x_{n+1} \geq 0$ với hệ số 1. Trong hàm mục tiêu $f(x) \rightarrow \min$, các biến giả có hệ số M (lớn tùy ý), trong hàm mục tiêu $f(x) \rightarrow \max$, các biến giả có hệ số $-M$. Chúng ta có bài toán mới gọi là **bài toán mở rộng** của bài toán xuất phát.

Hàm mục tiêu

$$\text{Min}(\text{max}) \sum_{j=1}^n c_j x_j \pm M \sum_{i=1}^m x_{n+i}$$

Ràng buộc

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} + \dots = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n + \dots + x_{n+2} + \dots = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n + \dots + x_{n+m} = b_m \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (\forall j = \overline{1, n+m})$$

△ Chú ý:

a. Phân biệt biến phụ và biến giả với 3 điểm sau:

- Biến phụ được sử dụng để đưa bài toán dạng tổng quát về dạng chính tắc còn biến giả được sử dụng để đưa bài toán dạng chính tắc về dạng chuẩn.
- Trong hàm mục tiêu, hệ số của các biến giả bằng M khi $f(x) \rightarrow \min$ hay bằng $-M$ khi $f(x) \rightarrow \max$ còn biến phụ luôn có hệ số bằng 0.

- Biến phụ là con số thực giúp chúng ta biến đổi ràng buộc dạng bất phương trình về dạng phương trình còn biến giả thì 2 vế đã bằng nhau mà vẫn cộng thêm là làm việc “giả tạo” để tạo ra véc tơ đơn vị mà thôi.

b. Nếu bài toán dạng chính tắc có $b_i \geq 0$ và đã có sẵn một số véc tơ cột đơn vị trong A, thì chỉ cần thêm biến giả vào những phương trình cần thiết đủ để tạo bài toán mở rộng dạng chuẩn.

c. Quan hệ giữa bài toán xuất phát và bài toán mở rộng:

Chúng ta thấy rằng các biến giả đều bằng 0 thì bài toán mới lại chính là bài toán cũ, vì vậy chúng ta là phải làm sao cho các biến giả bằng 0. Để đạt được kết quả như thế, chúng ta thực hiện như sau: Giả sử bài toán có $f(x) \rightarrow \min$, thì điều đó chỉ đạt được nếu các biến giả bằng 0. Vì nếu biến giả dương thì $f(x)$ vẫn còn chứa M với hệ số dương mà M lại lớn tùy ý thì $f(x)$ không đạt cực tiểu; còn nếu $f(x) \rightarrow \max$ thì M lại được thay bằng $-M$ cũng với ý đó.

△ Nhận xét:

1. Nếu $x=(x_1 \ x_2 \dots x_n)$ là phương án của bài toán xuất phát thì $x^*=(x_1 \ x_2 \dots x_n \ 0 \dots 0)$ sẽ là phương án của bài toán mở rộng.
2. Nếu $(x^0)=(x_1^0 \ x_2^0 \dots x_n^0)$ là phương án tối ưu của bài toán xuất phát thì $(x^*)=(x_1^0 \ x_2^0 \dots x_n^0 \ 0 \dots 0)$ là phương án tối ưu của bài toán mở rộng.

Từ điều này, chúng ta thấy rằng nếu bài toán mở rộng không có phương án tối ưu thì bài toán xuất phát cũng không có phương án tối ưu.

3. Nếu $(x^*)=(x_1^0 \ x_2^0 \dots x_n^0 \ 0 \dots 0)$ là phương án tối ưu của bài toán mở rộng thì $x^0=(x_1^0 \ x_2^0 \dots x_n^0)$ là phương án tối ưu của bài toán xuất phát. Tức là, nếu bài toán mở rộng có phương án tối ưu trong đó các biến giả đều bằng 0, thì bỏ phần biến giả đi còn lại phương án tối ưu của bài toán xuất phát.

4. Nếu bài toán mở rộng có phương án tối ưu trong đó có ít nhất một biến giả nhận giá trị dương, thì bài toán xuất phát không có phương án tối ưu.

Thật vậy, giả sử $f(x) \rightarrow \min$ và bài toán mở rộng có phương án tối ưu là $(x^*)=(x_1^0 \ x_2^0 \dots x_n^0 \ 0 \ 1 \dots 0)$ tức có biến giả $x_{n+2} = 1 > 0$, trong khi đó bài toán xuất phát vẫn có phương án $(x^1)=(x_1^1 \ x_2^1 \dots x_n^1)$. Khi đó, theo nhận xét (1) thì $(x^1)=(x_1^1 \ x_2^1 \dots x_n^1 \ 0 \dots 0)$ là phương án của bài toán mở rộng. Chúng ta có:

$$f(x^*) = \sum_{j=1}^n c_j x_j^0 + M$$

$$f(x^1) = \sum_{j=1}^n c_j x_j^0$$

Vì M là số lớn tùy ý nên: $f(x_*^1) < f(x_*^0)$ tức x_*^1 tốt hơn x_*^0 trái với việc x_*^0 là phương án tối ưu. Vậy, bài toán xuất phát không có phương án tối ưu.

Δ Nhận xét: Bất cứ bài toán dạng tổng quát nào cũng đưa được về dạng chính tắc và bài toán mở rộng dạng chuẩn. Như vậy, mấu chốt của vấn đề là giải bài toán dạng chuẩn.

2.3. Những phương pháp giải bài toán qui hoạch tuyến tính

2.3.1. Phương pháp đồ thị (phương pháp hình học)

Phương pháp đồ thị hay còn gọi là phương pháp hình học không có ý nghĩa nhiều trong giải các bài toán qui hoạch tuyến tính. Đối với các bài toán có nhiều ràng buộc và nhiều biến thì phương pháp này không thích hợp. Tuy nhiên, phương pháp này vẫn thường được sử dụng trong thực tế nhằm mô tả trực quan một số tính chất của bài toán qui hoạch tuyến tính. Một bài toán qui hoạch tuyến tính chỉ bao gồm 2 biến quyết định có thể được giải bằng phương pháp đồ thị. Phương pháp đồ thị bao gồm 2 bước cơ bản sau:

- Xác định miền chấp nhận bằng đồ thị;
- Tìm giá trị của hàm mục tiêu trên miền chấp nhận đó.

Chúng ta lần lượt thực hiện các bước sau:

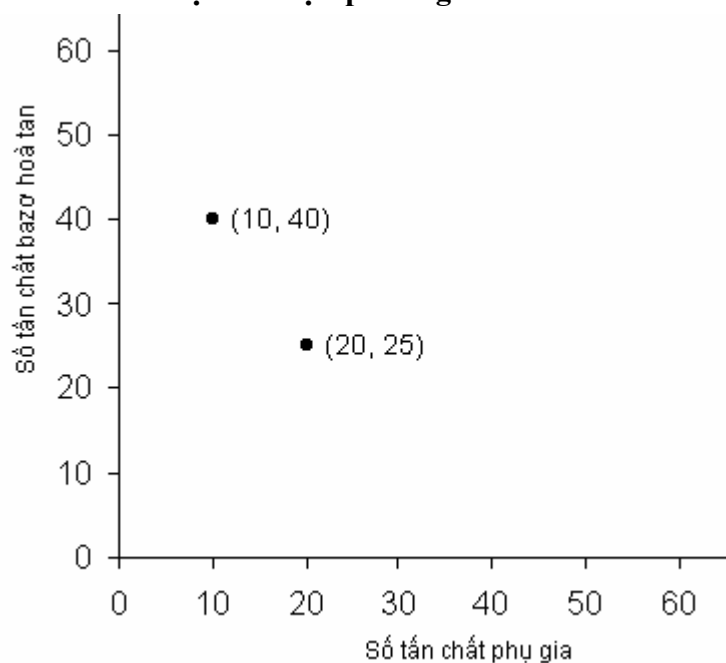
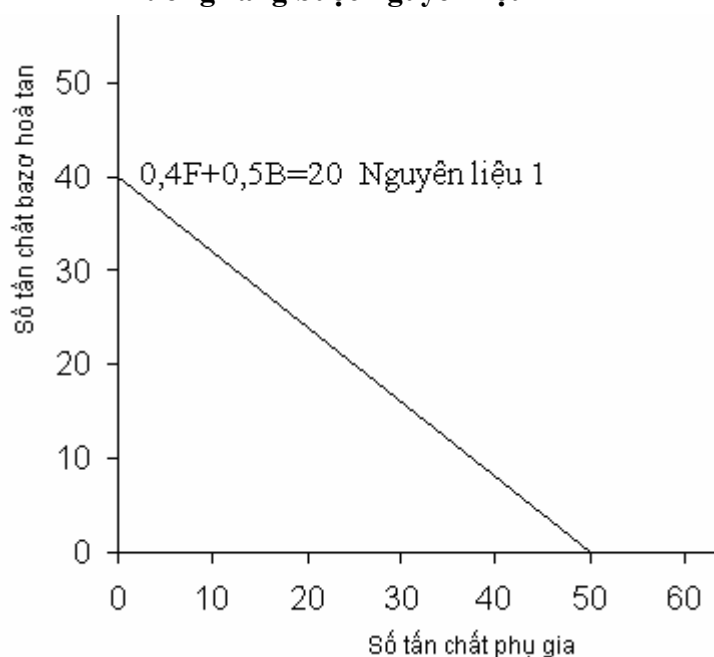
a. Xác định miền chấp nhận được

Chúng ta bắt đầu thủ tục giải bằng đồ thị từ việc xây dựng một đồ thị biểu thị những phương án có thể (những giá trị F và B) đối với bài toán ABC. Đồ thị ở Hình 2-1, trục hoành biểu thị những giá trị của F và trục tung biểu thị những giá trị của B . Bất cứ điểm nào trên đồ thị xác định giá trị của F và B . Vì vậy, mỗi điểm trên đồ thị tương ứng với một phương án có thể. Vì cả F và B không âm nên đồ thị ở Hình 2-1 chỉ thể hiện phương án trong đó $F \geq 0$ và $B \geq 0$.

Mỗi ràng buộc, chúng ta vẽ một đường thẳng:

- Ràng buộc nguyên liệu 1 là $0,4F + 0,5B \leq 20$

Để thể hiện tất cả các phương án thỏa mãn mỗi liên hệ này, chúng ta vẽ đường thẳng ứng với phương trình $0,4F + 0,5B = 20$. Chúng ta vẽ đường này bằng việc xác định 2 điểm và nối chúng lại. Cho $F=0$ và giải được $0,5B = 20$ hay $B=40$; nên phương án ($F=0, B=40$) thỏa mãn phương trình. Để tìm phương án thứ 2 thỏa mãn phương trình, chúng ta cho $B=0$ và xác định F . Làm vậy, chúng ta được $0,4F=20$, hay $F=50$. Vì thế phương án thứ hai là ($F=50, B=0$). Với hai điểm này, chúng ta có thể vẽ một đường. Với đường này gọi là đường ràng buộc nguyên liệu 1, thể hiện ở Hình 2-2.

Hình 2-1 Đồ thị biểu thị 2 phương án của bài toán ABC**Hình 2-2 Đường ràng buộc nguyên liệu 1**

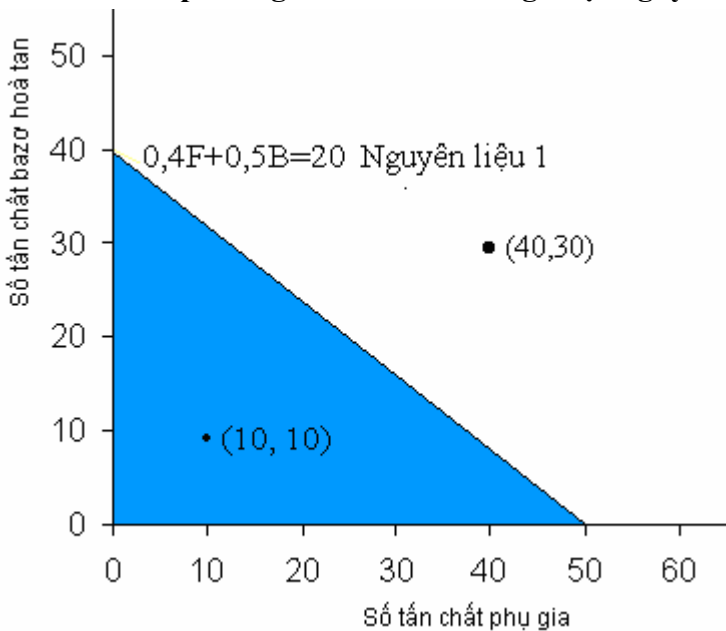
Xem xét bất phương trình tương ứng với ràng buộc nguyên liệu 1 là $0,4F + 0,5B \leq 20$.

Cần xác định tất cả các phương án thoả mãn ràng buộc này. Đầu tiên, chú ý rằng bất cứ điểm nào trên đường $0,4F + 0,5B = 20$ đều thoả mãn ràng buộc này. Còn các phương án thoả mãn $0,4F + 0,5B < 20$ thì nằm ở đâu so với đường thẳng này? Xem xét hai phương án ($F = 10, B = 10$) và ($F = 40, B = 30$). Hình 2-3 thể hiện phương án thứ nhất nằm phía dưới đường ràng buộc và điểm thứ hai nằm phía trên đường ràng buộc. Điểm nào trong chúng thoả mãn ràng buộc nguyên liệu 1? Với ($F = 10, B = 10$), chúng ta có $0,4F + 0,5B = 0,4(10) + 0,5(10) = 9$. Vì 9 tấn ít hơn 20 tấn nguyên liệu 1 khả dụng, nên phương án $F = 10, B = 10$ thoả mãn ràng buộc.

Với $F = 40$ và $B = 30$, chúng ta có $0,4F + 0,5B = 0,4(40) + 0,5(30) = 31$. Với 31 tấn lớn hơn 20 tấn khả dụng, nên phương án $F = 40, B = 30$ không thoả mãn ràng buộc.

△ Chú ý: Nếu một phương án thoả mãn ràng buộc, tất cả các phương án khác ở cùng phía của đường ràng buộc cũng thoả mãn ràng buộc. Nếu một phương án không thoả mãn ràng buộc thì tất cả các phương án khác ở cùng phía của đường ràng buộc sẽ không thoả mãn ràng buộc. Vì thế, chúng ta chỉ cần đánh giá chỉ một phương án để xác định phía nào của đường ràng buộc cung cấp những phương án thoả mãn các ràng buộc. Miền bóng trên Hình 2-3 thể hiện tất cả phương án thoả mãn ràng buộc nguyên liệu 1.

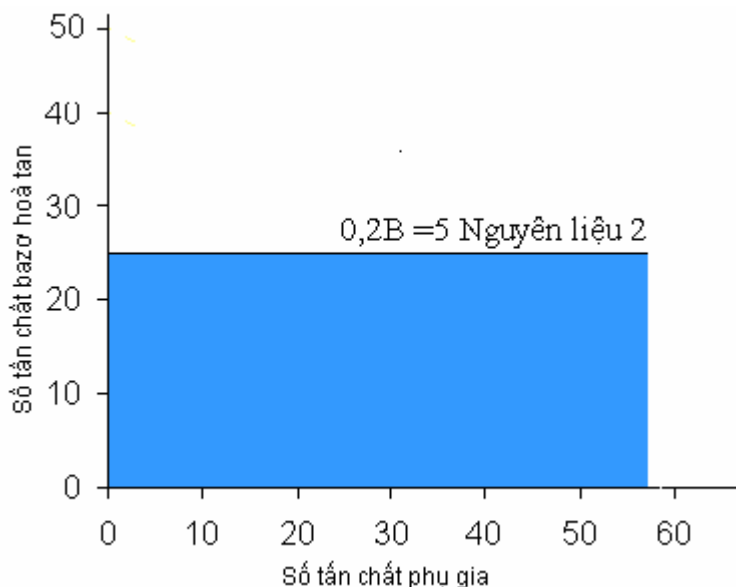
Hình 2-3: Các phương án thoả mãn ràng buộc nguyên liệu 1



- Tiếp theo, chúng ta xác định những phương án thoả mãn ràng buộc nguyên liệu 2: $0,2B \leq 5$

Chúng ta vẽ đường ràng buộc tương ứng với phương trình $0,2B=5$. Vì phương trình này tương đương với phương trình $B=25$ nên vẽ đường thẳng song song với trục hoành và cắt trục tung tại điểm tung độ là 25. Trong hình 2-4, chúng ta vẽ đường thẳng biểu thị ràng buộc nguyên liệu 2. Theo như cách tiếp cận của ràng buộc nguyên liệu 1, chúng ta nhận thấy chỉ những phương án nằm trên hay dưới đường thẳng thoả mãn ràng buộc nguyên liệu 2. Vì thế, ở Hình 2-4, diện tích có bóng tương ứng với phương án thoả mãn ràng buộc nguyên liệu 2.

Hình 2-4: Các phương án thoả mãn ràng buộc nguyên liệu 2

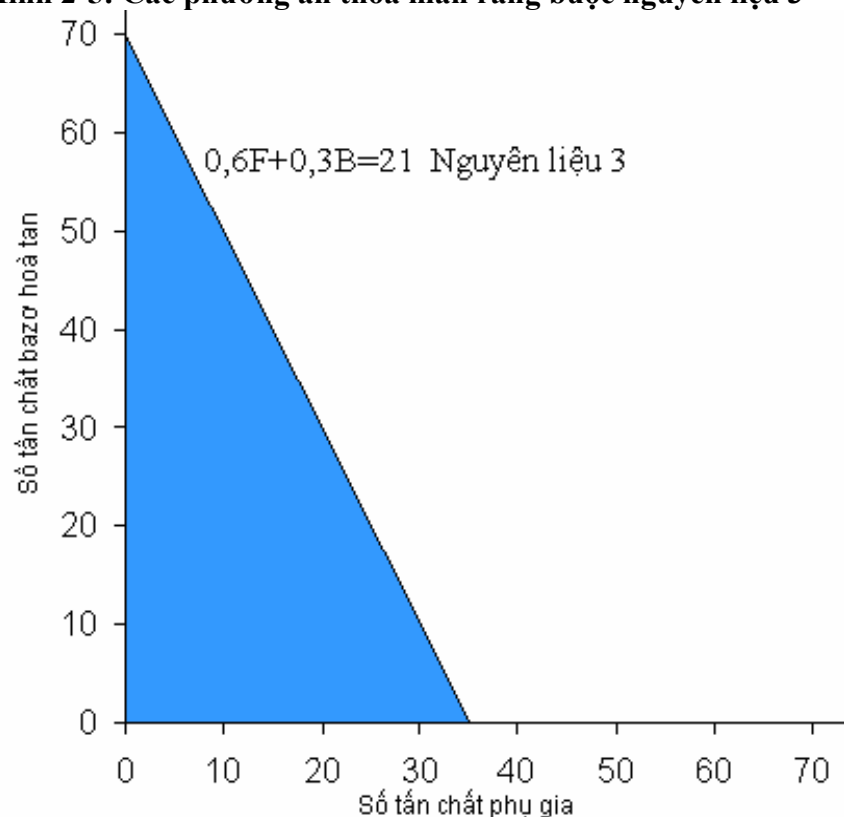


Tương tự, các phương án thoả mãn ràng buộc nguyên liệu 3 thể hiện trên Hình 2-5.

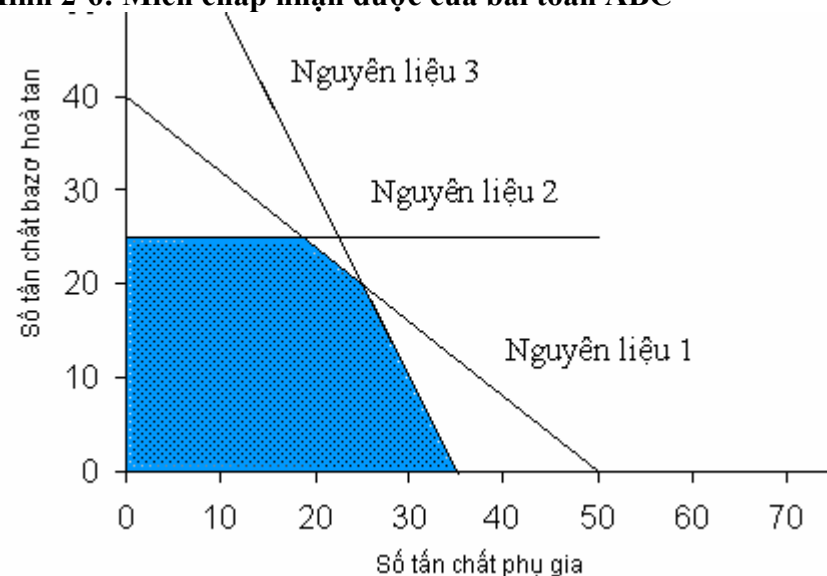
Bây giờ, chúng ta có 3 đồ thị riêng thể hiện các phương án thoả mãn từng ràng buộc. Trong bài toán qui hoạch tuyến tính, chúng ta cần xác định tất cả các phương án thoả mãn đồng thời tất cả các ràng buộc. Để tìm những phương án này, chúng ta có thể vẽ 3 ràng buộc lên cùng một đồ thị và quan sát miền chứa những điểm thoả mãn đồng thời các ràng buộc.

Đồ thị trên các Hình 2-3, Hình 2-4 và Hình 2-5 có thể được đặt chồng lên để xác định một đồ thị với 3 ràng buộc. Trên Hình 2-6 thể hiện đồ thị đã kết hợp các ràng buộc. Miền bóng trong hình này bao gồm các điểm phương án thoả mãn đồng thời tất cả các ràng buộc. Vì những phương án thoả mãn đồng thời các ràng buộc được gọi là những phương án chấp nhận được, miền bóng được gọi là miền phương án chấp nhận được, gọi tắt là miền chấp nhận được. Bất cứ các điểm nằm trên đường biên của miền chấp nhận hoặc trong miền chấp nhận được gọi là điểm phương án chấp nhận được đối với bài toán qui hoạch tuyến tính.

Hình 2-5: Các phương án thoả mãn ràng buộc nguyên liệu 3

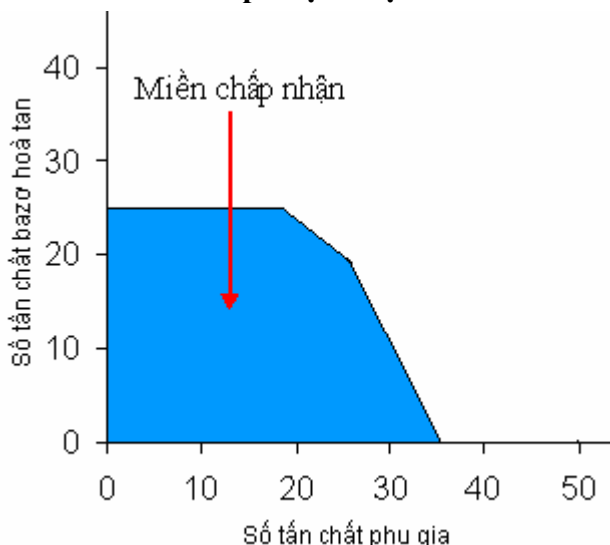


Hình 2-6: Miền chấp nhận được của bài toán ABC



Bây giờ đã xác định miền chấp nhận được, chúng ta tiếp tục tìm phương án tối ưu cho bài toán ABC. Nhớ rằng phương án tối ưu của bài toán qui hoạch tuyến tính là phương án chấp nhận được mà nó xác định giá trị có thể tốt nhất của hàm mục tiêu. Chúng ta hãy bắt đầu bước tối ưu của thủ tục đồ thị bằng việc vẽ lại miền chấp nhận ở một đồ thị riêng như đồ thị ở Hình 2-7.

Hình 2-7: Miền chấp nhận được của bài toán ABC



b. Tìm giá trị của hàm mục tiêu trên miền chấp nhận

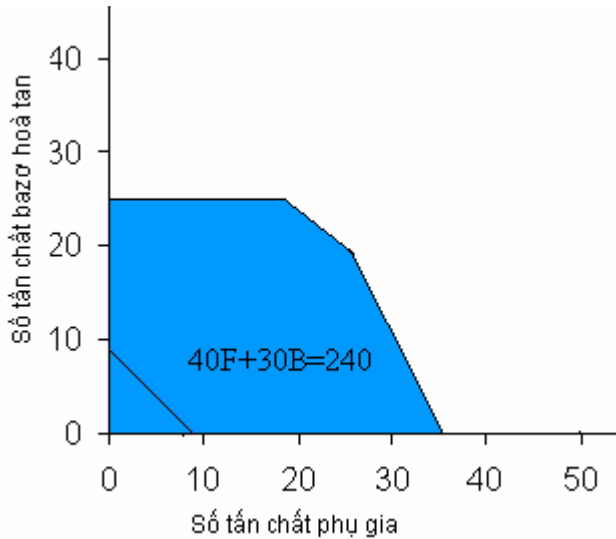
Cách thức tìm phương án tối ưu là đánh giá hàm mục tiêu theo các phương án có thể chấp nhận được (gọi tắt phương án chấp nhận). Phương án tối ưu sẽ cho giá trị hàm mục tiêu lớn nhất.

Khó khăn của cách thức này là có quá nhiều phương án có thể chấp nhận, nên việc đánh giá tất cả các phương án chấp nhận sẽ không khả thi. Chính vì vậy, thủ tục thử và sai không thể dùng để xác định phương án tối ưu.

Thay vì tính lợi nhuận cho mỗi phương án chấp nhận, chúng ta chọn giá trị lợi nhuận bất kỳ và xác định tất cả phương án tương ứng với lợi nhuận đó. Ví dụ, những phương án chấp nhận nào để được lợi nhuận 240 ngàn đồng? Những phương án này chính là những giá trị của F và B trong miền chấp nhận được mà hàm mục tiêu sẽ là $40F + 30B = 240$. Biểu thức này là phương trình của đường thẳng. Vì thế tất cả các phương án chấp nhận được (F, B) ứng với lợi nhuận 240 ngàn đồng phải nằm trên đường thẳng. Trong phần trước, chúng ta đã biết vẽ đường thẳng ràng buộc. Thủ tục vẽ đồ thị đối với hàm mục tiêu cũng tương tự. Cho $F=0$, chúng ta thấy B phải là 8; vì thế điểm $(F=0, B=8)$ nằm trên đường thẳng. Tương tự, cho $B=0$, chúng ta được điểm $(F=6, B=0)$ cũng là điểm nằm trên đường thẳng. Vẽ đường thẳng qua hai điểm này sẽ xác định tất

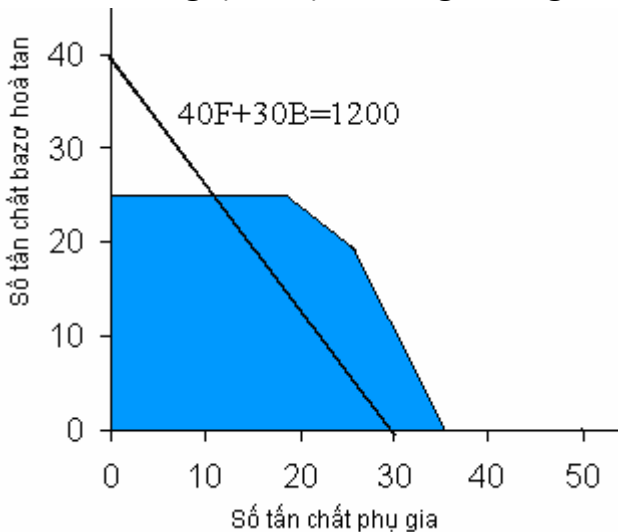
cả các phương án mà cho giá trị lợi nhuận 240 ngàn đồng. Đồ thị này được biểu diễn trên Hình 2-8. Nó thể hiện vô số các kết hợp sản xuất sẽ cho lợi nhuận 240 ngàn đồng.

Hình 2-8: Đường lợi nhuận 240 ngàn đồng của bài toán ABC



Mục tiêu là tìm phương án chấp nhận mà cho lợi nhuận lớn nhất, vì vậy chúng ta chọn những lợi nhuận lớn hơn và tìm các phương án tương ứng. Ví dụ, những phương án nào đạt lợi nhuận 1200 ngàn đồng? Để trả lời câu hỏi này, chúng ta phải tìm F và B trên những đường lợi nhuận $40F + 30B = 1200$.

Hình 2-9: Đường lợi nhuận 1200 ngàn đồng của bài toán ABC



Dùng thủ tục như trước để vẽ đường lợi nhuận và kết quả đường lợi nhuận 1200 ngàn đồng như trên Hình 2-9. Quan sát, chúng ta thấy không phải tất cả các điểm phương án trên đường lợi nhuận 1200 ngàn đồng đều nằm trong miền chấp nhận.

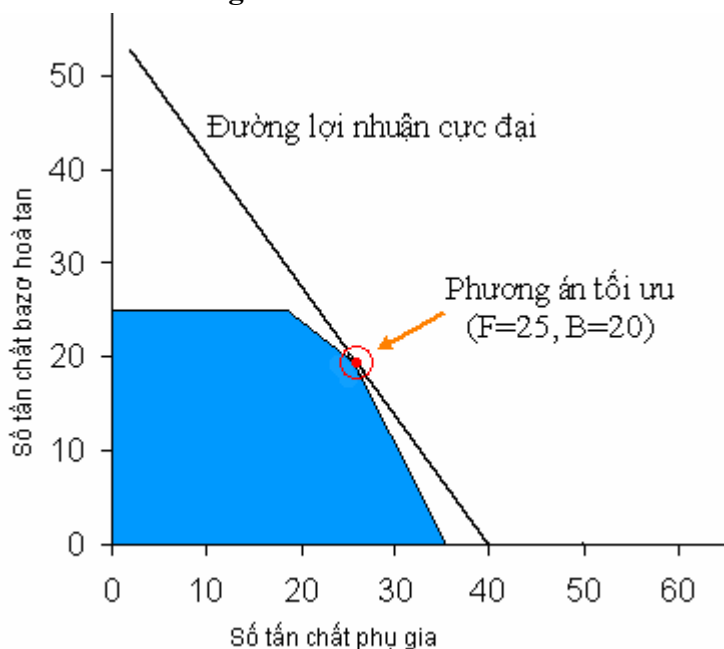
Liệu chúng ta có thể tìm được những phương án chấp nhận để có mức lợi nhuận lớn hơn không? Hãy nhìn Hình 2-9 và thực hiện quan sát về đường lợi nhuận. Chúng ta có thể xác định những thuộc tính sau:

- Những đường lợi nhuận là những đường thẳng song song với nhau,
- Đường lợi nhuận cao hơn sẽ cách xa gốc toạ độ hơn.

Bởi vì các đường lợi nhuận song song với nhau và đường lợi nhuận cao hơn sẽ cách xa gốc toạ độ hơn nên chúng ta có thể xác định các phương án làm tăng giá trị của hàm mục tiêu bằng cách tịnh tiến đường lợi nhuận xa gốc toạ độ. Tuy nhiên, tại một vài điểm di chuyển xa hơn sẽ đặt đường lợi nhuận nằm ngoài miền chấp nhận được. Vì những điểm ngoài miền chấp nhận là không thể chấp nhận nên điểm trong miền chấp nhận mà nằm trên đường lợi nhuận lớn nhất là phương án tối ưu.

Bây giờ, chúng ta có thể xác định điểm phương án tối ưu đối với bài toán ABC. Hãy tịnh tiến đường lợi nhuận càng xa gốc toạ độ tới mức có thể. Điểm cuối cùng trong miền chấp nhận được là điểm nào? Điểm này chính là phương án tối ưu, được thể trên đồ thị như Hình 2-10. Những giá trị tối ưu đối với biến quyết định là những giá trị của F và B tại điểm này.

Hình 2-10: Phương án tối ưu của bài toán ABC



Phụ thuộc vào độ chính xác của việc vẽ đồ thị, chúng ta có thể hay không thể xác định chính xác giá trị tối ưu của F và B một cách trực tiếp từ đồ thị. Nhìn vào Hình 2-10, điểm phương án tối ưu đối với ABC là giao điểm của hai đường ràng buộc nguyên liệu 1 và 3.

Vậy, phương án tối ưu nằm cả trên đường ràng buộc nguyên liệu 1:

$$0,4F + 0,5B = 20 \quad (2-1)$$

Và, đường ràng buộc nguyên liệu 3:

$$0,6F + 0,3B = 21 \quad (2-2)$$

Vì thế, những giá trị của biến quyết định F và B phải thỏa mãn đồng thời phương trình (2-1) và (2-2). Giải ra, chúng ta được $F=20$, $B=25$.

Vì thế, vị trí chính xác của điểm phương án tối ưu là $F=25$ và $B=20$. Điểm này cung cấp lượng sản xuất tối ưu đối với ABC ở mức 25 tấn chất phụ gia và 20 tấn bazơ hoà tan và được lợi nhuận là $40 \times 25 + 30 \times 20 = 1600$.

Tóm tắt về phương pháp đồ thị đối với bài toán cực đại

Như chúng ta đã thấy, thủ tục giải bằng đồ thị là phương pháp được dùng với những bài toán qui hoạch tuyến tính gồm 2 biến quyết định, như bài toán ABC. Các bước của thủ tục giải bằng đồ thị với những bài toán cực đại được tóm lược như sau:

1. Vẽ đồ thị các ràng buộc: mỗi ràng buộc vẽ một đường thẳng và xác định miền chấp nhận được của mỗi ràng buộc;
2. Xác định miền chấp nhận được bằng việc xác định các phương án thỏa mãn đồng thời tất cả các ràng buộc;
3. Vẽ đường hàm mục tiêu;
4. Đối với bài toán cực đại, tịnh tiến đường hàm mục tiêu trong miền chấp nhận theo hướng làm giá trị của hàm mục tiêu lớn hơn cho đến khi giá trị của hàm mục tiêu lớn nhất (đối với bài toán cực tiểu thì ngược lại)
5. Bất kỳ phương án trên đường mục tiêu với giá trị lớn nhất (đối với bài toán cực đại) là phương án tối ưu.

2.3.2. Phương pháp đơn hình

Đối với những bài toán có nhiều biến, chúng ta không thể sử dụng phương pháp đồ thị được mà phải sử dụng phương pháp đơn hình. Phương pháp này được G.Dantzig đưa ra năm 1947. Trong khoảng 40 năm, phương pháp này thực sự hiệu quả duy nhất để giải các bài toán qui hoạch tuyến tính cỡ lớn trong thực tế. Hiện nay, phương pháp điểm mới có thể cạnh tranh đối với phương pháp đơn hình.

Trong giáo trình này, chúng ta không đi sâu nghiên cứu phương pháp này mà chỉ quan tâm đến ứng dụng nó để giải các bài toán qui hoạch tuyến tính.

Phương pháp này được sử dụng rộng rãi và hiện nay có nhiều phần mềm máy tính đã ứng dụng phương pháp này.

a. Thuật toán đơn hình giải bài toán dạng chuẩn

Thuật toán được áp dụng cho từng bài toán cực tiểu hay cực đại. Chúng ta lần lượt nghiên cứu thuật toán cho từng loại.

- Trường hợp Bài toán Min

Thuật toán gồm 5 bước như sau:

Bước 1: Lập bảng ban đầu: căn cứ vào bài toán dạng chuẩn để lập bảng và dạng cơ bản như trên Bảng 2-2.

Bảng 2-2: Bảng đơn hình đầu tiên

Biến cơ bản	Hệ số	x_1	x_2	...	x_r	...	x_m	x_{m+1}	...	x_v	...	x_n	Phương án
		c_1	c_2	...	c_r	...	c_m	c_{m+1}	...	c_v	...	c_n	
x_1	c_1	1	0	...	0	..	0	$a_{1(m+1)}$	...	a_{1v}	...	a_{1n}	b_1
x_2	c_2	0	1	...	0	...	0	$a_{2(m+1)}$	...	a_{2v}	...	a_{2n}	b_2
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_r	c_r	0	0	...	1	...	0	$a_{r(m+1)}$	...	a_{rv}	...	a_{rn}	b_r
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_m	c_m	0	0	...	0	...	1	$a_{m(m+1)}$	...	a_{mv}	...	a_{mn}	b_m
		0	0	...	0	...	0	Δ_{m+1}	...	Δ_v	...	Δ_n	f_0

Trong đó: $f_0 = \sum_{i=1}^m c_i b_i$ và $\Delta_j = \sum_{i=1}^m c_i a_{ij} - c_j$

Bước 2: Kiểm tra tính tối ưu

- Nếu $\Delta_j \leq 0 \forall j$ thì phương án đang xét là tối ưu và giá trị hàm mục tiêu là $f(x)=f_0$.

- Nếu $\exists \Delta_j > 0$ mà $a_{ij} \leq 0 \forall i$ thì bài toán không có phương án tối ưu.

Nếu cả hai trường hợp trên không xảy ra thì chuyển sang bước 3.

Bước 3: Tìm biến đưa vào:

Xét các $\Delta_j > 0$, Nếu $\Delta_v = \max \Delta_j$ thì x_v được chọn đưa vào. Khi đó cột v gọi là cột chủ yếu.

Bước 4: Tìm biến đưa ra:

Tính $\lambda_i = b_i/a_{iv}$ ứng với các $a_{iv} > 0$

Nếu $\lambda_r = \min \lambda_i$ thì x_r là biến đưa ra. Khi đó, hàng r gọi là hàng chủ yếu, phần tử a_{rv} là phần tử trục xoay.

Bước 5: Biến đổi bảng như sau:

1. Thay x_r bằng x_v và c_r bằng c_v . Các biến cơ bản khác và hệ số tương ứng để nguyên.
2. Chia hàng chủ yếu (hàng r) cho phần tử trục xoay a_{rv} , chúng ta được hàng r mới và được gọi là hàng chuẩn.
3. Muốn có hàng i mới ($i \neq r$), chúng ta lấy $-a_{iv}$ nhân với hàng chuẩn rồi cộng vào hàng i cũ.
4. Muốn có hàng cuối mới, chúng ta lấy $-\Delta_v$ nhân với hàng chuẩn rồi cộng vào hàng cuối cũ.

Δ Chú ý:

Hàng cuối (gồm f và Δ_j) cũng có thể tính trực tiếp như ở bước 1 với bảng mới vừa được tạo.

⊙ Ví dụ: Chúng ta có bài toán qui hoạch tuyến tính sau:

$$\text{Min } 6x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 - 7x_6$$

St.

$$-x_1 + x_2 - x_4 + x_6 = 15$$

$$2x_1 - x_3 + 2x_6 = -9$$

$$4x_1 + 2x_4 + x_5 - 3x_6 = 2$$

$$x_j \geq 0 \quad \forall j = \overline{1,6}$$

⚡ Lời giải: Bài toán có dạng chính tắc nhưng có $b_2 < 0$ nên thực hiện biến đổi ràng buộc này bằng cách đổi dấu hai vế. Như vậy, bài toán chính tắc trở thành dạng chuẩn như sau:

$$\text{Min } 6x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 - 7x_6$$

St.

$$-x_1 + x_2 - x_4 + x_6 = 15$$

$$-2x_1 + x_3 - 2x_6 = 9$$

$$4x_1 + 2x_4 + x_5 - 3x_6 = 2$$

$$x_j \geq 0 \quad \forall j = \overline{1,6}$$

Bài toán này là bài toán dạng chuẩn, vậy có thể lập bảng đơn hình đầu tiên như trên Bảng 2-3.

Bảng 2-3: Bảng đơn hình đầu tiên

Biến cơ bản	Hệ số	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Phương án	λ_i
		6	1	1	3	1	-7		
x_2	1	-1	1	0	-1	0	1	15	15
x_3	1	-2	0	1	0	0	-2	9	
x_5	1	4	0	0	2	1	-3	2	
		-5	0	0	-2	0	3	26	

Chúng ta nhận thấy $\Delta_6 > 0$ và chỉ có $a_{16} > 0$ nên đưa x_6 vào bảng và loại x_2 khỏi bảng và thành bảng đơn hình thứ hai như trên Bảng 2-4.

Bảng 2-4: Bảng đơn hình thứ hai

Biến cơ bản	Hệ số	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Phương án	λ_i
		6	1	1	3	1	-7		
x_6	-7	-1	1	0	-1	0	1	15	
x_3	1	-4	2	1	-2	0	0	39	
x_5	1	1	3	0	-1	1	0	47	
		-2	-3	0	1	0	0	-19	

Chúng ta nhận thấy $\Delta_4 > 0$ nhưng các $a_{i4} < 0$ nên bài toán không có phương án tối ưu.

-Trường hợp Bài toán Max

Về cơ bản, thuật toán giải bài toán Max giống thuật toán giải bài toán Min, chúng chỉ khác nhau ở bước 2 và bước 3. Cụ thể, thuật toán có các thay đổi ở các bước như sau:

1. Ở bước 2 (kiểm tra tính tối ưu)

+ Phương án tối ưu khi $\Delta_j \geq 0 \forall j$

+ Nếu $\exists \Delta_j < 0$ mà $a_{ij} \leq 0 \forall i$ thì bài toán không có phương án tối ưu.

2. Ở bước 3: biến chọn đưa vào là biến có Δ_j âm và nhỏ nhất

☉ Ví dụ: Quay lại bài toán ABC, chúng ta thực hiện biến đổi dạng tổng quát về dạng chuẩn tắc.

Vì trong các ràng buộc có các bất đẳng thức $\leq$ nên đưa thêm các biến phụ vào các ràng buộc nhằm tạo thành các ràng buộc phương trình, kết quả như sau:

Max $40F + 30B$

Ràng buộc

$$0,4F + 0,5B + 1S_1 = 20 \quad \text{Nguyên liệu 1}$$

$$0,2B + 1S_2 = 5 \quad \text{Nguyên liệu 2}$$

$$0,6F + 0,3B + S_3 = 21 \quad \text{Nguyên liệu 3}$$

$$B, F, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

Như vậy, bài toán có dạng chuẩn và có thể thành lập bảng đơn hình đầu tiên như trên Bảng 2-5.

Bảng 2-5: Bảng đơn hình đầu tiên

Biến cơ bản	Hệ số	F	B	S_1	S_2	S_3	b_i	λ_i
		40	30	0	0	0		
S_1	0	0,4	0,5	1	0	0	20	50
S_2	0	0	0,2	0	1	0	5	M
S_3	0	0,6	0,3	0	0	1	21	35
	0	-40	-30	0	0	0	0	

Xem các Δ_j ở hàng cuối cùng của Bảng 2-5, chúng ta thấy Δ_1 và $\Delta_2 < 0$. Với $\Delta_1 = -40$ là nhỏ nhất nên chọn biến F đưa vào và $\lambda_3 = 35$ là nhỏ nhất nên đưa biến S_3 ra và được bảng đơn hình thứ hai. Xem Bảng 2-6.

Bảng 2-6: Bảng đơn hình thứ hai

Biến cơ bản	Hệ số	F	B	S_1	S_2	S_3	b_i	λ_i
		40	30	0	0	0		
S_1	0	0	0,3	1	0	-2/3	6	20
S_2	0	0	0,2	0	1	0	5	25
F	40	1	0,5	0	0	10/6	35	70
		0	-10	0	0	200/3	1400	

Xem các Δ_j ở hàng cuối cùng của Bảng 2-6, chúng ta thấy $\Delta_2 < 0$. Vì $\Delta_2 = -10$ là nhỏ nhất nên chọn B đưa vào và vì $\lambda_1 = 10$ là nhỏ nhất và loại bỏ biến S_1 , chúng ta có bảng đơn hình thứ ba. Xem Bảng 2-7.

Trong bảng đơn hình thứ ba có mọi Δ_j không âm nên phương án đang xét là phương án tối ưu: $B=20$ và $F=25$ và giá trị của hàm mục tiêu sẽ là $40 \times 25 + 30 \times 20 = 1600$ ngàn đồng.

Bảng 2-7: Bảng đơn hình thứ ba

Biến cơ bản	Hệ số	F	B	S ₁	S ₂	S ₃	b _i	λ_i
		40	30	0	0	0		
B	30	0	1	10/3	0	-20/9	20	
S ₂	0	0	0	-2/3	1	4/9	1	
F	40	1	0	-5/3	0	25/9	25	
		0	0	100/3	0	400/9	1600	

b. Thuật toán đơn hình giải bài toán mở rộng

Như đã đề cập ở trên, khi gặp bài toán dạng chính tắc chưa phải dạng chuẩn, chúng ta sẽ dùng biến giả để đưa về dạng chuẩn (bài toán mở rộng) và giải bài toán ấy. Kết quả sẽ là:

- Nếu bài toán mở rộng không có phương án tối ưu thì bài toán xuất phát cũng không có phương án tối ưu.
- Nếu bài toán mở rộng có phương án tối ưu mà các biến giả đều bằng không thì bỏ biến giả đi, chúng ta được phương án tối ưu của bài toán xuất phát.
- Nếu bài toán mở rộng có phương án tối ưu mà trong đó, còn ít nhất một biến giả dương thì bài toán xuất phát không có phương án tối ưu.

△Chú ý:

1. Trong bài toán mở rộng, Δ_j và $f(x_*)$ sẽ gồm 2 phần: một phần phụ thuộc vào M và một phần không phụ thuộc vào M, nên hàng cuối của bảng chia thành hai dòng nhỏ: dòng trên ghi phần không phụ thuộc M, dòng dưới ghi hệ số M. Cả hai dòng đều tuân theo phép biến đổi bảng. Thí dụ $\Delta_3=2M-9$ thì ở cột 3 dòng trên ghi -9, dòng dưới ghi 2. Do M rất lớn nên khi xét dấu Δ_j ta chỉ cần quan tâm dòng dưới. Khi nào dòng dưới bằng 0 mới quan tâm đến dòng trên. Còn muốn so sánh Δ_j nào lớn hơn (hay nhỏ hơn) ta cũng chỉ cần quan tâm đến dòng dưới, trừ khi dòng dưới bằng nhau ta mới chú ý đến dòng trên.
2. Mỗi khi một biến giả bị đưa khỏi hệ biến cơ bản thì sẽ không được đưa trở lại, vì vậy có thể không cần chú ý tới các cột ứng với biến giả.

⊙ Ví dụ: Giải bài toán qui hoạch tuyến tính sau:

$$\text{Min}(x_1 + 2x_2 + x_4 - 5x_5)$$

Ràng buộc

$$3x_3 - 9x_4 = 0$$

$$x_2 - 7x_3 - x_4 - 2x_5 = 5$$

$$x_1 - 1/3x_2 + 2/3x_3 + 4/3x_4 + 1/3x_5 = 2/3$$

$$x_j \geq 0 \text{ (mọi } j)$$

Bài toán chưa phải dạng chuẩn nên dùng biến giả x_6 và x_7 và mô hình sẽ là:

$$\text{Min}(x_1 + 2x_2 + x_4 - 5x_5 + Mx_6 + Mx_7)$$

Ràng buộc

$$\begin{aligned} 3x_3 - 9x_4 + x_6 &= 0 \\ x_2 - 7x_3 - x_4 - 2x_5 + x_7 &= 5 \\ x_1 - 1/3x_2 + 2/3x_3 + 4/3x_4 + 1/3x_5 &= 2/3 \\ x_j &\geq 0 \text{ (mọi } j) \end{aligned}$$

Chúng ta đưa số liệu vào bảng để giải và kết quả như trên Bảng 2-8.

Bảng 2-8: Kết quả các bước giải

Biến cơ bản	Hệ số	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Phương án
		1	2	0	1	-5	
x_6	M	0	0	-3	-9	0	0
x_7	M	0	1	-7	-1	-2	5
x_1	1	1	-1/3	2/3	4/3	1/3	2/3
		0	-7/3	2/3	1/3	16/3	2/3
		0	1	-10	-10	-2	5
x_6	M	0	0	-3	-9	0	0
x_2	2	0	1	-7	-1	-2	5
x_1	1	1	0	-5/3	1	-1/3	7/3
	F(x)	0	0	-47/3	-2	2/3	37/3
		0	0	-3	-9	0	0

Ở bước 1, chúng ta tính được:

$f(x) = 5M + 2/3$, chúng ta viết $2/3$ lên trên và 5 xuống dưới

$\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = M - 7/3$, $\Delta_3 = -10M + 2/3$, $\Delta_4 = -14M + 1/3$, $\Delta_5 = -2M + 16/3$.

Chúng ta cũng viết phần không phụ thuộc M lên trên còn hệ số của M xuống dưới. Xem Bảng 2-8.

Trong Bảng 2-8, chúng ta thấy có $\Delta_2 > 0$ nên phương án chưa tối ưu và chưa có dấu hiệu chứng tỏ bài toán không có phương án tối ưu. Vì $\Delta_2 > 0$ duy nhất nên chúng ta chọn biến đưa ra là x_7 . Lúc này, phần tử trục xoay là 1.

Sau khi biến đổi bảng, chúng ta nhận thấy có $\Delta_5=2/3>0$ mà $a_{i5} \leq 0$ (mọi i) nên bài toán mở rộng không có phương án tối ưu và suy ra bài toán xuất phát cũng không có phương án tối ưu.

⊙ Ví dụ: Giải bài toán qui hoạch tuyến tính sau:

$$\text{Min}(-16x_1+7x_2+9x_3)$$

Ràng buộc

$$-2/3x_1-1/3x_2+x_3=1/3$$

$$-5x_1+5x_2=7$$

$$x_j \geq 0 \text{ mọi } j$$

Chúng ta đưa bài toán về dạng chuẩn bằng cách thêm biến giả như sau:

$$\text{Min} (-16x_1 + 7x_2 + 9x_3 + Mx_4)$$

Ràng buộc

$$-2/3x_1-1/3x_2+x_3=1/3$$

$$-5x_1+5x_2+x_4=7$$

$$x_j \geq 0 \text{ mọi } j$$

Với bài toán này, các bảng đơn hình như trên Bảng 2-9.

Bảng 2-9: Các bước của thuật toán đơn hình

Biến cơ bản	Hệ số	x_1	x_2	x_3	Phương án
		-16	7	9	
x_3	9	-2/3	-1/3	1	1/3
x_4	M	-5	5	0	7
	F(x)	10	-10	0	3
		-5	5	0	7
x_3	9	-1	0	1	4/5
x_2	7	-1	1	0	7/5
	F(x)	0	0	0	17

Sau một lần biến đổi bảng, chúng ta thấy: $x^{*0}=(x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4)=(0 \ 7/5 \ 4/5 \ 0)$ là phương án tối ưu của bài toán mở rộng mà biến giả $x_4=0$ nên phương án tối ưu của bài toán xuất phát là: $x^0=(x_1 \ x_2 \ x_3)=(0 \ 7/5 \ 4/5)$. Với phương án này, hàm mục tiêu đạt được là $f(x^0)=17$.

⊙ Ví dụ: Giải bài toán qui hoạch tuyến tính sau:

$$\text{Min}(2x_1+4x_2-2x_3)$$

Ràng buộc

$$x_1-2x_2+x_3=27$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 50$$

$$x_1 - x_2 - x_3 \leq 18$$

$$x_j \geq 0 \text{ (mọi } j)$$

Chúng ta đưa bài toán về dạng chuẩn:

$$\text{Min}(2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + Mx_5 + Mx_6)$$

Ràng buộc

$$x_1 - 2x_2 + x_3 + x_5 = 27$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_6 = 50$$

$$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 18$$

$$x_j \geq 0 \text{ (mọi } j)$$

Đưa số liệu của bài toán vào bảng và kết quả như trên Bảng 2-10.

Bảng 2-10: Các bước của thuật toán

Biến cơ bản	Hệ số	x_1	x_2	x_3	x_4	Phương án	λ
		2	4	-2	0		
x_5	M	1	-2	1	0	27	27
x_6	M	2	1	2	0	50	25
x_4	0	1	1	-1	1	18	
		-2	-4	2	0	0	
		3	-1	3	0	77	
x_5	M	0	-5/2	0	0	2	
x_3	-2	1	1/2	1	0	25	
x_4	0	2	-1/2	0	1	43	
		-4	-5	0	0	-50	
		0	-5/2	0	0	2	

Đến đây phương án đã tối ưu là $(x^{*0})^T = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6) = (0 \ 0 \ 25 \ 43 \ 2 \ 0)$ nhưng còn biến giả $x_5 = 2 > 0$ nên bài toán xuất phát không có phương án.

c. Giải bằng máy tính

Có thể thực hiện giải bài toán qui hoạch tuyến tính bằng các phần mềm máy tính. Hiện nay, có nhiều phần mềm máy tính có thể thực hiện chức năng này. Chúng ta có thể sử dụng công cụ Solver trong EXCEL để giải bài toán qui hoạch tuyến tính. (Xem lại chương 1 để có công cụ Solver trong EXCEL). Cách thức thực hiện như sau:

Bước 1: Nhập dữ liệu đầu vào của bài toán vào bảng tính.

Bước 2: Chỉ định các ô chứa các biến quyết định: mỗi biến là một ô. Để thuận tiện theo dõi cần nhập thêm dòng chú giải, như: *các biến quyết định* hay cụ thể hơn là *lượng sản xuất*.

Bước 3: Chọn một ô và nhập biểu thức của hàm mục tiêu. Cần ghi chú thêm dòng *hàm mục tiêu*.

Bước 4: Chọn một ô và nhập biểu thức để tính ràng buộc bên trái của mỗi ràng buộc. Mỗi một ràng buộc cần ghi chú tên mỗi ràng buộc.

Bước 5: Chọn một ô và nhập biểu thức để tính vế phải của mỗi ràng buộc. Thực tế, bước này có thể bỏ qua mà dùng địa chỉ ban đầu của các ô chứa nguồn lực hay nhu cầu những để thuận tiện nên thực hiện bước này.

 Với bài toán ABC, chúng ta thực hiện nhập số liệu theo các bước sau:

Bước 1: Nhập số liệu như sau:

Các ô từ B5 đến C7 thể hiện định mức nguyên liệu cho mỗi tấn sản phẩm.

Các ô B8 và C8 thể hiện lợi nhuận đóng góp của mỗi tấn sản phẩm sản xuất.

Các ô từ D5 đến D7 thể hiện lượng nguyên liệu khả dụng của mỗi loại

Bước 2: Chỉ định vị trí cho mỗi biến quyết định:

Ô B15 cho chất phụ gia và ô C15 cho chất bazơ hoà tan.

Bước 3: Chọn ô để nhập biểu thức hàm mục tiêu:

Ô B17: $=B8*B15+C8*C15$

Bước 4: Chọn một ô và nhập biểu thức tính vế trái của mỗi ràng buộc, chúng ta nhập:

Ô B20: $=B5*B15+C5*C15$

Ô B21: $=C6*C15$

Ô B22: $=B7*B15+C7*C15$

Bước 5: Chọn một ô và nhập biểu thức tính vế phải của mỗi ràng buộc, chúng ta có:

Ô D20: $=D5$

Ô D21: $=D6$

Ô D22: $=D7$

Kết quả nhập dữ liệu như trên Hình 2-11.

Sau khi nhập số liệu và những công thức thích hợp, chúng ta sử dụng công cụ của Solver để giải. Những bước sau mô tả sử dụng công cụ Solver cho bài toán ABC.

Chúng ta lần lượt thực hiện các bước sau:

Hình 2-11: Nhập dữ liệu đầu vào cho bài toán qui hoạch dùng Solver

	A	B	C	D	E
1	Bài toán RMC				
2					
3		Nhu cầu nguyên liệu			
4	Nguyên liệu	Chất phụ gia	Bazơ hoà tan	Lượng khả dụng	
5	Nguyên liệu 1	0.4	0.5	20	
6	Nguyên liệu 2		0.2	5	
7	Nguyên liệu 3	0.6	0.3	21	
8	Lợi nhuận mỗi tấn	40	30		
9					
10					
11	Mô hình				
12					
13		Biến quyết định			
14		Chất phụ gia	Bazơ hoà tan		
15	Lượng sản xuất				
16					
17					
18	Hàm mục tiêu	=B8*B15+C8*C15			
19	Ràng buộc	Lượng dùng		Lượng khả dụng	
20	Nguyên liệu 1	=B5*B15+C5*C15	≤	=D5	
21	Nguyên liệu 2	=C6*C15	≤	=D6	
22	Nguyên liệu 3	=B7*B15+C7*C15	≤	=D7	

Bước 1: Chọn menu **Tools**

Bước 2: Chọn mục **Solver**

Bước 3: Khi thoại xuất hiện, hãy nhập như sau:

Nhập B17 vào hộp **Set Target Cell**

Chọn **Equal To:** Max

Nhập B15:C15 vào hộp **By Changing Cells**

Bước 4: Chọn Add, hộp thoại **Add Constraint** xuất hiện, khi đó hãy:

Nhập B20:B22 vào hộp **Cell Reference**

Chọn **<=**

Nhập D20:D22 vào hộp **Constraint**

Chọn **OK**

Bước 5: Khi hộp thoại **Solver Parameters** xuất hiện, chọn **Options**.

Bước 6: Khi hộp thoại **Solver Options** xuất hiện:

Chọn **Assume Linear Model**

Chọn **Assume Non-Negative**

Chọn **OK**

Bước 7: Khi hộp thoại **Solver Parameters** xuất hiện, chọn **Solver**

Bước 8: Khi hộp thoại **Solver Results** xuất hiện:

Chọn **Keep Solver Solution**

Chọn **OK**, kết quả như trên Hình 2-12

Hình 2-12: Kết quả giải bằng Solver

	Biến quyết định		
	Chất phụ gia	Bazo' hoà tan	
Lượng sản xuất	25	20	
Hàm mục tiêu	1600		
Ràng buộc	Lượng dùng (LHS)		Lượng khả dụng (RHS)
Nguyên liệu 1	20 ≤		20
Nguyên liệu 2	4 ≤		5
Nguyên liệu 3	21 ≤		21

2.4. Bài toán đối ngẫu

2.4.1. Khái niệm bài toán đối ngẫu

a. Bài toán đối ngẫu D của bài toán gốc P dạng chính tắc

Cho bài toán gốc dạng chính tắc như sau:

Hàm mục tiêu

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min(\max)$$

Ràng buộc

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = \overline{1, m})$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n})$$

Bài toán D sau đây được gọi là bài toán đối ngẫu của nó:

Hàm mục tiêu

$$g(y) = \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \max(\min)$$

Ràng buộc

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq (\geq) c_j \quad (j = \overline{1, n})$$

y_i tùy ý về dấu $i = \overline{1, m}$

△ Nhận xét:

- Hàm mục tiêu của P là $f(x) \rightarrow \min$ thì hàm mục tiêu của D là $g(y) \rightarrow \max$ và ngược lại;
- Các ràng buộc ở bài toán D đều là bất đẳng thức ($\leq$) nếu $f(x) \rightarrow \min$ hoặc ($\geq$) nếu $f(x) \rightarrow \max$;
- Số biến của bài toán này là số ràng buộc của bài toán kia và ngược lại;
- Các hệ số c_j và các số hạng tự do ở hai bài toán đối ngược lại nhau;
- Ma trận hệ số các ràng buộc ở hai bài toán là chuyển vị của nhau.
Hàng i của ma trận $A = (a_{ij})_{mn}$ xác định ràng buộc thứ i của bài toán gốc
 $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i$ còn cột j trong ma trận A xác định ràng buộc thứ j của bài toán đối ngẫu $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq (\geq) c_j$.

b. Bài toán đối ngẫu của bài toán dạng tổng quát

Để thành lập bài toán đối ngẫu của bài toán tổng quát, chúng ta dựa vào qui tắc lập bài toán đối ngẫu như trên Bảng 2-11.

Bảng 2-11: Qui tắc lập bài toán đối ngẫu

Bài toán P	Bài toán D
$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min$	$g(y) = \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \max$
Ràng buộc thứ i $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \begin{cases} \geq \\ \leq \\ = \end{cases} b_i \quad (i = \overline{1, m})$	Biến i : $y_i \begin{cases} \geq \\ \leq \\ \text{tùy ý} \end{cases} 0$
Biến j : $x_j \begin{cases} \geq \\ \leq \\ \text{tùy ý} \end{cases} 0$	Ràng buộc j : $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \begin{cases} \leq \\ \geq \\ = \end{cases} c_j$

Vận dụng Bảng 2-11 như thế nào?

- Nếu bài toán gốc có hàm mục tiêu dạng Min, chúng ta xem bài toán đó ở

phần bên trái bảng và bài toán đối ngẫu sẽ được chỉ ra ở phần bên phải bảng.

- Nếu bài toán gốc có hàm mục tiêu dạng Max, chúng ta xem bài toán đó ở phần bên phải bảng và bài toán đối ngẫu được chỉ ra ở bên trái bảng.

△ Nhận xét: Bài toán đối ngẫu của bài toán đối ngẫu chính là bài toán gốc.

⊙ Ví dụ: Tìm bài toán đối ngẫu của bài toán:

$$\text{Max}(2x_1+3x_2-x_3+x_4)$$

Ràng buộc

$$2x_1-x_2-x_3+x_4 \leq 5$$

$$x_1+x_2+2x_3+x_4=7$$

$$5x_1+x_2+3x_3+x_4 \geq 20$$

$$x_1; x_2 \geq 0; x_3 \leq 0 \text{ và } x_4 \text{ tùy ý.}$$

Bài toán đối ngẫu sẽ là:

$$\text{Min}(5y_1+7y_2+20y_3)$$

Ràng buộc

$$2y_1+y_2+5y_3 \geq 2$$

$$-y_1+y_2+y_3 \geq 3$$

$$-y_1+2y_2+3y_3 \leq -1$$

$$y_1+y_2+y_3=1$$

$$y_1 \geq 0; y_2 \text{ tùy ý; } y_3 \leq 0.$$

⊙ Ví dụ: Tìm bài toán đối ngẫu của bài toán:

$$\text{Min}(5x_1-x_2+2x_3+3x_4-6x_5)$$

Ràng buộc

$$3x_1-x_2+2x_3+3x_4+4x_5=80$$

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 \geq -10$$

$$3x_1-2x_2-2x_3-x_4+x_5 \leq 30$$

$$x_1+x_3 \leq 6$$

$$x_1 \leq 0; x_2; x_3 \geq 0; x_4 \text{ và } x_5 \text{ tùy ý.}$$

Bài toán đối ngẫu sẽ là:

$$\text{Max}(80y_1-10y_2+30y_3+6y_4)$$

Ràng buộc

$$3y_1+y_2+3y_3+y_4 \geq 5$$

$$-y_1+y_2-2y_3 \leq -1$$

$$2y_1+y_2-2y_3+y_4 \leq 2$$

$$3y_1+y_2-y_3=3$$

$$4y_1 + y_2 + y_3 = -6$$

$$y_1 \text{ tùy ý; } y_2 \geq 0; y_3 \leq 0; y_4 \leq 0$$

2.4.2. Quan hệ giữa bài toán gốc và bài toán đối ngẫu

Nhằm nghiên cứu mối quan hệ giữa bài toán gốc và bài toán đối ngẫu làm cơ sở cho việc giải bài toán gốc cũng như phân tích độ nhạy, chúng ta xem xét các định lý đối ngẫu sau:

Định lý 1: Với cặp bài toán P và D, chỉ xảy ra 1 trong 3 trường hợp sau:

1. Cả hai đều không có phương án;
2. Cả hai đều có phương án, lúc đó cả hai cùng có phương án tối ưu và giá trị hai hàm mục tiêu đối với phương án tối ưu bằng nhau;
3. Một trong hai bài toán không có phương án, còn bài toán kia có phương án. Khi đó, bài toán có phương án sẽ không có phương án tối ưu và hàm mục tiêu của nó không bị chặn.

Hệ quả 1: Nếu một trong hai bài toán có phương án tối ưu thì bài toán kia cũng có phương án tối ưu.

Hệ quả 2: Điều kiện cần và đủ để phương án x^0 của P và y^0 của D tối ưu là: $f(x^0) = g(y^0)$

Định lý 2: (độ lệch bù yếu): Điều kiện cần và đủ để phương án x^0 của P và y^0 của D tối ưu là:

$$\begin{cases} x_j^0 \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^0 - c_j \right) = 0 \quad (j = \overline{1, n}) \\ y_i^0 \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^0 - b_i \right) = 0 \quad (i = \overline{1, m}) \end{cases}$$

Tìm nghiệm tối ưu của bài toán gốc qua nghiệm tối ưu của bài toán đối ngẫu của nó.

Giả sử đã giải được bài toán đối ngẫu, khi đó:

1. Nếu bài toán đối ngẫu không có phương án tối ưu thì bài toán gốc cũng không có phương án tối ưu (hệ quả 1 của định lý 1)
2. Bài toán đối ngẫu có phương án tối ưu:

$$y^0 = (y_1^0, y_2^0 \dots y_m^0)$$

Theo định lý 2, chúng ta tìm phương án tối ưu của bài toán gốc như sau:

Thứ nhất: Nếu $y_i^0 > 0$ thì chúng ta được $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i$ (điều này đảm bảo

cho $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i = 0$ để tích $y_i^0 (\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i) = 0$).

Thứ hai: Thay $y^0 = (y_1^0 \ y_2^0 \ \dots \ y_m^0)$ vào biểu thức $\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i^0 - c_j = 0$ ($j = \overline{1, n}$). Nếu với chỉ số j nào đó, biểu thức này khác 0 thì $x_j=0$.

Kết hợp các phương trình ở phần thứ nhất và kết quả ở phần thứ hai sẽ tìm được hệ phương trình và tìm nghiệm tối ưu của bài toán gốc.

⊙ Ví dụ: Xem lại bài toán ABC

Hàm mục tiêu

$$\text{Min } (20x_1 + 5x_2 + 21x_3)$$

Ràng buộc

$$\begin{array}{rcl} 0,4x_1 + & 0,6x_3 & \geq 40 \\ 0,5x_1 + 0,2x_2 + 0,3x_3 & \geq & 30 \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq 0 \end{array}$$

Bài toán đối ngẫu sẽ là:

Hàm mục tiêu

$$\text{Max } (40y_1 + 30y_2)$$

Ràng buộc

$$\begin{array}{rcl} 0,4y_1 + 0,5y_2 & \leq & 20 \\ & 0,2y_2 & \leq 5 \\ 0,6y_1 + 0,3y_2 & \leq & 21 \\ & y_1, y_2 & \geq 0 \end{array}$$

Phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu sẽ là $y_1=25$ và $y_2=20$ và giá trị của hàm tiêu sẽ là $f(y_0)=1600$ ngàn đồng.

Thế các nghiệm vào các ràng buộc, chúng ta thấy ở ràng buộc 2:

$$0,2y_2 - 5 = 0,2 \times 20 - 5 = 4 - 5 = -1 \neq 0 \text{ vậy } x_2=0$$

Vì $y_1=25 > 0$ và $y_2=20 > 0$ nên chúng ta hệ phương trình như sau:

$$\begin{array}{rcl} 0,4x_1 + & 0,6x_3 & = 40 \\ 0,5x_1 + 0,2x_2 + 0,3x_3 & = & 30 \end{array}$$

Vì $x_2=0$ nên chúng ta được hệ phương trình như sau:

$$\begin{array}{rcl} 0,4x_1 + 0,6x_3 & = & 40 \\ 0,5x_1 + 0,3x_3 & = & 30 \end{array}$$

Giải hệ phương trình này, chúng ta được phương án tối ưu của bài toán gốc như sau: $x_1=300/9$, $x_2=0$, $x_3=400/9$ và giá trị của hàm mục tiêu là $f(x^0)=1600$ ngàn đồng.

2.4.3. Ý nghĩa của bài toán đối ngẫu

Như trên đã nêu, nếu sử dụng phương pháp đơn hình để giải một trong hai bài toán, coi như đã giải được bài toán kia mà không cần dùng phương pháp đơn hình. Vậy, nếu gặp bài toán khó thì nên đưa về bài toán đối ngẫu có thể sẽ dễ giải hơn.

⊙ Ví dụ: xem xét bài toán sau:

Hàm mục tiêu

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min$$

Ràng buộc

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad (i = \overline{1, m})$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n})$$

Chúng ta giả thiết $c_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n})$

Nếu giải trực tiếp, chúng ta phải đưa vào m biến phụ với hệ số -1 , rồi lại thêm m biến giả với hệ số 1 mới đưa được về dạng chuẩn để giải bằng thuật toán đơn hình. Còn nếu đưa về dạng đối ngẫu:

Hàm mục tiêu

$$g(y) = \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \max$$

Ràng buộc

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j \quad (j = \overline{1, n})$$

Ràng buộc dấu

$$y_i \geq 0 \quad i = \overline{1, m}$$

Thì chỉ cần đưa m biến phụ với hệ số 1 là ta có ngay bài toán dạng chuẩn.

Ngoài ra, chúng ta còn chứng minh được khi đã có phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu, tức ở bảng $\Delta_j \geq 0 \quad \forall j$ thì $x^0 = (\Delta_{m+1} \Delta_{m+2} \dots \Delta_{m+n})$ chính là phương án tối ưu của bài toán gốc. Trong đó, Δ_{m+j} là ước lượng của biến phụ y_{m+j} .

Ý nghĩa kinh tế của bài toán đối ngẫu

Xem xét bài toán sản xuất dạng:

Hàm mục tiêu

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max$$

Ràng buộc

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \quad (i = \overline{1, m})$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n})$$

Bài toán đối ngẫu sẽ là:

Hàm mục tiêu

$$g(y) = \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \min$$

Ràng buộc

$$\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i \geq c_j \quad (j = \overline{1, n})$$

Ràng buộc dấu

$$y_i \geq 0 \quad i = \overline{1, m}$$

Trong phân tích kinh tế, bài toán đối ngẫu được sử dụng phổ biến, chúng ta có thể hình dung qua những tình huống sau:

Giả sử xí nghiệp không tiến hành sản xuất các loại sản phẩm để thu lợi nhuận mà nhượng lại số nguyên liệu hiện có cho một xí nghiệp khác. Vấn đề cần định giá chuyển nhượng nguyên liệu với giá bao nhiêu để xí nghiệp thu được lợi nhuận không ít hơn lợi nhuận do phương án sản xuất mang lại.

Gọi y_i là giá chuyển nhượng một đơn vị nguyên liệu loại i . Vậy, đơn giá nguyên liệu là bao nhiêu để lợi nhuận khi chuyển nhượng toàn bộ số đơn vị nguyên liệu các loại cần thiết để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm loại i không ít hơn số lợi nhuận thu được khi sản xuất đơn vị sản phẩm này, tức cần

$\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i \geq c_j \quad (j = \overline{1, n})$. Đương nhiên, giá chuyển nhượng phải là những đại lượng không âm, tức $y_i \geq 0$ với mọi i . Tổng giá trị chuyển nhượng toàn bộ nguyên liệu sẽ là $g(y) = \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \min$ (nếu hàm mục tiêu là max, khi các hệ số a_{ij} , b_i , c_j không âm bài toán đối ngẫu không có lời giải. Mặt khác, theo tính chất của bài toán đối ngẫu, thì dù xí nghiệp có chọn phương án giá chuyển nhượng như thế nào đi nữa thì số tiền thu được cũng không ít hơn lợi nhuận ứng với bất kỳ một phương án sản xuất nào, tức là $f(x)_{\min} \geq g(y)_{\max}$.

Trong điều kiện số liệu của bài toán qui hoạch tuyến tính có thể bị thay đổi hay không chính xác, chúng ta sử dụng bài toán đối ngẫu làm cơ sở để phân tích độ nhạy. Phân tích độ nhạy cung cấp nhiều thông tin hữu ích làm cơ sở hỗ trợ rất tốt cho các nhà quản trị.

Việc phân tích độ nhạy như thế nào, chúng ta sẽ nghiên cứu kỹ trong phần tiếp theo.

2.5. Phân tích độ nhạy

2.5.1. Giới thiệu phân tích độ nhạy

Trong thực tế, các dữ liệu ban đầu của bài toán qui hoạch tuyến tính khó có thể coi là chính xác hoàn toàn, vì chúng được đo bằng thiết bị và có sai số hoặc được xác định xấp xỉ qua thống kê, qua xây dựng mô hình... Hơn nữa, các dữ liệu này thay đổi theo thời gian do sự biến động của tình hình. Vì vậy, sau khi giải xong qui hoạch tuyến tính, chúng ta cần biết cái gì sẽ xảy ra nếu dữ liệu của bài toán thay đổi. Có thể xem xét những mức độ thay đổi của dữ liệu như sau:

- Sự thay đổi dữ liệu nhưng bài toán tối ưu nhận được vẫn là tối ưu? Khi đó, chúng ta không phải giải lại bài toán;
- Mức thứ hai của sự thay đổi là làm nghiệm tối ưu bị thay đổi, nhưng chúng ta có thể tận dụng được bảng tối ưu cũ để tìm nghiệm mới mà không phải giải bài toán qui hoạch mới từ đầu;
- Sự thay đổi quá lớn nên phải giải lại bài toán từ đầu.

Nghiên cứu về các mức độ trên đây và các phương pháp cần thực hiện cụ thể cho từng trường hợp gọi là phân tích độ nhạy (sensitivity analysis) hoặc phân tích hậu tối ưu (Postoptimality analysis).

Phân tích độ nhạy là nghiên cứu sự thay đổi của những hệ số trong bài toán qui hoạch tuyến tính ảnh hưởng đến phương án tối ưu. Dùng phân tích độ nhạy, chúng ta có thể trả lời những câu hỏi sau:

- Hệ số trong hàm mục tiêu thay đổi sẽ ảnh hưởng như thế nào đến phương án tối ưu?
- Giá trị của vế phải của các ràng buộc thay đổi sẽ ảnh hưởng như thế nào đến phương án tối ưu?

Bởi vì phân tích độ nhạy quan tâm đến những thay đổi này ảnh hưởng đến phương án tối ưu nên phân tích độ nhạy chỉ bắt đầu sau khi phương án tối ưu của bài toán gốc được xác định. Chính vì vậy, phân tích độ nhạy thường được gọi là phân tích hậu tối ưu.

Phân tích độ nhạy rất quan trọng trong việc ra quyết định vì các bài toán tồn tại trong môi trường thay đổi. Ví dụ, có sự thay đổi về giá cả nguyên liệu, nhu cầu, năng lực sản xuất... Nếu bài toán qui hoạch tuyến tính được sử dụng trong môi trường như thế, một vài hệ số trong bài toán có thể thay đổi. Khi đó, chúng ta muốn xác định những thay đổi này ảnh hưởng như thế nào đến phương án tối ưu. Phân tích độ nhạy cung cấp những thông tin cần thiết ứng với những thay đổi đó.

Cách tiếp cận của chúng ta trong phân tích độ nhạy tương tự như cách tiếp cận được sử dụng trong bài toán qui hoạch đã giới thiệu. Chúng ta có thể thực

hiện phân tích độ nhạy bằng phương pháp đồ thị hay bằng bảng đơn hình như đã giới thiệu. Việc tiếp cận bằng đồ thị sẽ trực quan hơn nhưng không được tổng quát. Trong phạm vi của tài liệu này, chúng ta không muốn đi sâu về lý luận phân tích độ nhạy mà cố gắng tiếp cận theo hướng ứng dụng.

Chúng ta giới thiệu phân tích độ nhạy bằng việc dùng phương pháp đồ thị đối với bài toán qui hoạch tuyến tính với 2 biến quyết định. Sau đó, chúng ta mở rộng cho những bài toán lớn hơn.

Quay lại bài toán ABC, các nhà quản trị của công ty ABC muốn xác định số tấn chất phụ gia (F) và số tấn chất bazơ hoà tan (B) để sản xuất nhằm tối đa lợi nhuận với hai sản phẩm. Ba ràng buộc nguyên liệu thô giới hạn lượng sản phẩm sản xuất. Mô hình qui hoạch tuyến tính ABC được trình bày lại như sau:

Hàm mục tiêu

Max $40F + 30B$

Ràng buộc

$0,4F + 0,5B \leq 20$ Nguyên liệu 1

$0,2B \leq 5$ Nguyên liệu 2

$0,6F + 0,3B \leq 21$ Nguyên liệu 3

$F, B \geq 0$

Phương án tối ưu, $F=25$ tấn và $B=20$ tấn, giá trị hàm mục tiêu 1600 ngàn đồng.

Phương án tối ưu dựa vào lợi nhuận một tấn chất phụ gia là 40 ngàn đồng và lợi nhuận của một tấn chất bazơ hoà tan là 30 ngàn đồng. Tuy nhiên, giả sử rằng sau đó chúng ta biết rằng giá giảm làm cho lợi nhuận một tấn chất phụ gia từ 40 ngàn đồng xuống còn 30 ngàn đồng. Phân tích độ nhạy có thể dùng để xác định liệu việc sản xuất 25 tấn chất phụ gia và 20 tấn chất bazơ hoà tan vẫn còn tốt hay không. Nếu thế, giải bài toán qui hoạch tuyến tính với hàm mục tiêu mới $30F + 30B$ là không cần thiết.

Phân tích độ nhạy cũng có thể được dùng để xác định các hệ số nào trong hàm mục tiêu của bài toán qui hoạch tuyến tính là chủ yếu. Ví dụ, giả sử rằng nhà quản trị tin tưởng rằng lợi nhuận của mỗi tấn chất bazơ hoà tan là 30 ngàn đồng chỉ là ước lượng gần đúng của lợi nhuận thực tế đạt được. Nếu phân tích độ nhạy thể hiện rằng 25 tấn chất phụ gia và 20 tấn chất bazơ hoà tan sẽ là phương án tối ưu khi nào lợi nhuận của mỗi tấn chất bazơ hoà tan nằm trong khoảng 20 ngàn đồng đến 50 ngàn đồng, nhà quản trị sẽ cảm thấy thoả mái với lợi nhuận 30 ngàn đồng cho một tấn. Tuy nhiên, nếu phân tích độ nhạy thể hiện rằng 25 tấn chất phụ gia và 20 tấn chất bazơ hoà tan sẽ là phương án tối ưu chỉ nếu lợi nhuận mỗi tấn bazơ hoà tan nằm giữa 29,9

ngàn đồng và 30,10 ngàn đồng mỗi tấn, nhà quản trị cần phải xem lại tính chính xác của 30 ngàn đồng mỗi tấn ước lượng.

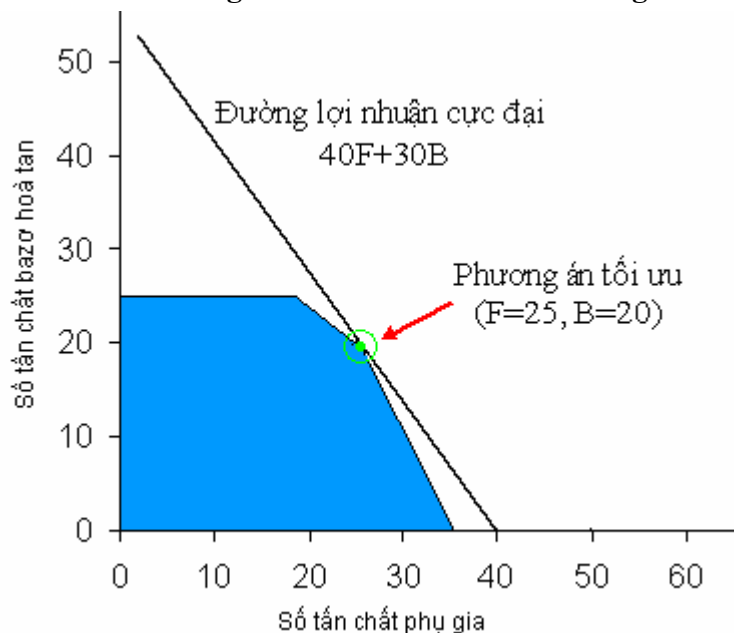
Hướng phân tích khác của phân tích độ nhạy là quan tâm đến sự thay đổi giá trị của vế phải của các ràng buộc. Quay lại bài toán ABC, phương án tối ưu dùng tất cả nguyên liệu thô 1 và 3. Chuyện gì sẽ xảy ra đối với phương án tối ưu và tổng lợi nhuận nếu các nhà quản trị của công ty ABC có thể bổ sung một trong hai nguồn nguyên liệu này? Phân tích độ nhạy có thể giúp chúng ta xác định số tấn của mỗi loại nguyên liệu có thể bổ sung thêm vào.

Chúng ta lần lượt xem xét từng trường hợp:

2.5.2. Các hệ số của hàm mục tiêu

Khi phân tích độ nhạy, chúng ta có thể thực hiện bằng phương pháp đồ thị hay bằng bảng đơn hình. Chúng ta bắt đầu phân tích độ nhạy bằng dùng đồ thị để biểu diễn hệ số hàm mục tiêu thay đổi như thế nào có thể ảnh hưởng đến phương án tối ưu của bài toán qui hoạch tuyến tính. Chúng ta bắt đầu với phương án của bài toán ABC gốc như Hình 2-13.

Hình 2-13: Phương án tối ưu của bài toán ABC gốc



Miền chấp nhận được tô bóng. Hàm mục tiêu $40F + 30B$ nhận giá trị cực đại tại điểm cực biên $F=25$ và $B=20$. Vì thế, $F=25$ và $B=20$ là phương án tối ưu và $40(25) + 30(20) = 1600$ là giá trị của hàm mục tiêu.

Khi chỉ có sự biến đổi của các hệ số của hàm mục tiêu thì miền chấp nhận của bài toán không thay đổi mà chỉ làm thay đổi hệ số góc của đường mục tiêu.

Bây giờ, giả sử các nhà quản trị biết rằng giảm giá chất phụ gia làm giảm lợi nhuận xuống 30 ngàn đồng mỗi tấn. Với sự giảm giá này, phương án tối ưu gốc $F=25$ tấn và $B=20$ tấn có bị thay đổi không?

Khi có sự thay đổi các hệ số của hàm mục tiêu, bài toán qui hoạch tuyến tính với hàm mục tiêu sửa lại như sau:

$$\text{Max } 30F + 30B$$

Ràng buộc

$$0,4F + 0,5B \leq 20 \quad \text{Nguyên liệu 1}$$

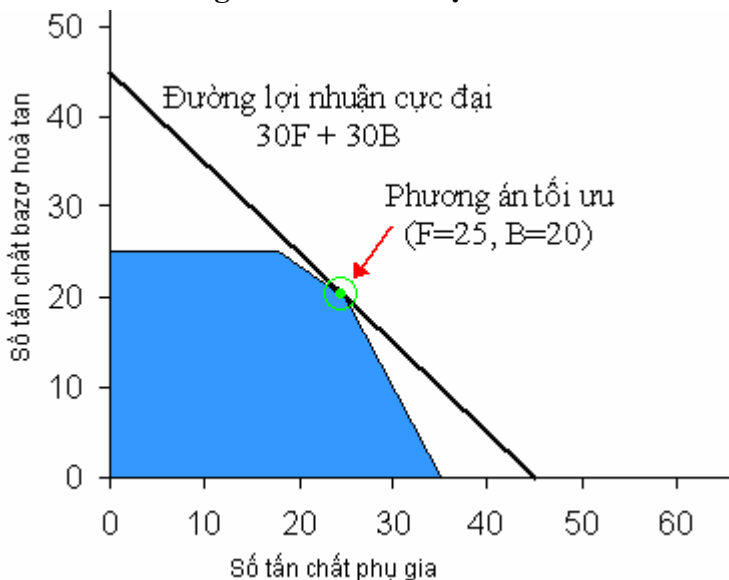
$$0,2B \leq 5 \quad \text{Nguyên liệu 2}$$

$$0,6F + 0,3B \leq 21 \quad \text{Nguyên liệu 3}$$

$$F, B \geq 0$$

Chú ý rằng chỉ có hàm mục tiêu thay đổi còn các ràng buộc không đổi. Vì các ràng buộc không thay đổi nên miền chấp nhận được đối với bài toán ABC mới tương tự như bài toán gốc. Phương án đồ thị của bài toán ABC với hàm mục tiêu $30F + 30B$ thể hiện trên Hình 2-14.

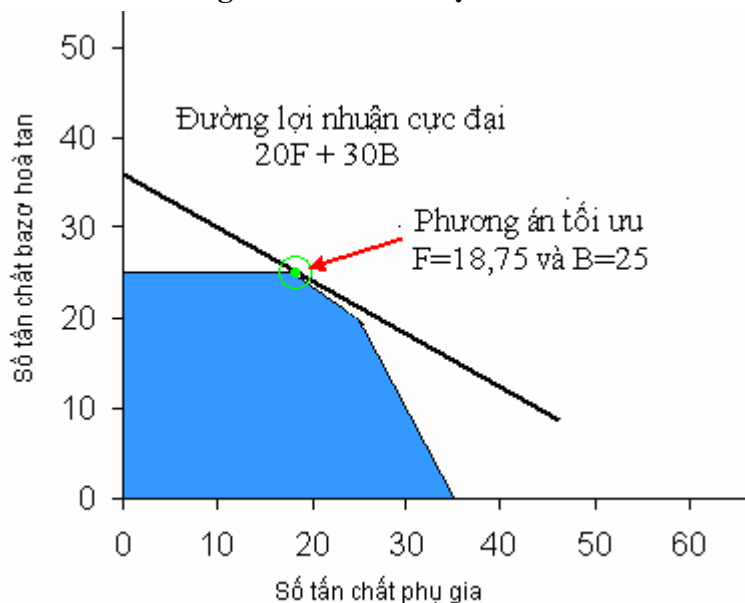
Hình 2-14: Phương án tối ưu đã được chỉnh sửa với hàm mục tiêu mới



Chúng ta hãy chú ý rằng điểm cực biên cho phương án tối ưu vẫn là $F=25$ và $B=20$. Vì thế, mặc dù tổng lợi nhuận giảm xuống $30(25) + 30(20) = 1350$ và lợi nhuận mỗi tấn chất phụ gia giảm từ 40 ngàn đồng xuống 30 ngàn đồng thì phương án tối ưu $F=25$ và $B=20$ vẫn không đổi.

Bây giờ, chúng ta hãy giả sử rằng lợi nhuận mỗi tấn chất phụ gia giảm còn 20 ngàn đồng mỗi tấn, phương án $F=25$ và $B=20$ vẫn còn là phương án tối ưu không? Xem kết quả điều chỉnh như trên Hình 2-15.

Hình 2-15: Phương án tối ưu đã được chỉnh sửa với hàm mục tiêu mới



Hình 2-15 thể hiện phương án của bài toán ABC với hàm mục tiêu được sửa thành $20F + 30B$. Điểm cực biên cho thấy phương án tối ưu bây giờ là $F=18,75$ và $B=25$. Tổng lợi nhuận giảm xuống còn $20(18,75) + 30(25) = 1125$. Tuy nhiên, trong trường hợp này, chúng ta thấy rằng lợi nhuận của chất phụ gia giảm còn 20 ngàn đồng mỗi tấn làm thay đổi phương án tối ưu. Như vậy, phương án $F=25$ tấn và $B=20$ không còn tối ưu. Bây giờ, phương án $F=18,75$ và $B=25$ là phương án tối ưu của ABC.

Những gì chúng ta biết từ phương án đồ thị trong Hình 2-13, Hình 2-14, Hình 2-15? Trước tiên, sự thay đổi của hệ số của hàm mục tiêu làm thay đổi hệ số góc của đường hàm mục tiêu nhưng miền chấp nhận được không thay đổi. Nếu hệ số của hàm mục tiêu thay đổi ít, điểm cực biên cho phương án tối ưu đối với bài toán gốc vẫn cho phương án tối ưu. Qua đồ thị ở Hình 2-16, chúng ta có thể hình dung đường mục tiêu có thể xoay quanh điểm $(25, 20)$ và nằm trong miền của 2 đường A và B thì phương án tối ưu vẫn không đổi.

Một cách tổng quát đường mục tiêu có dạng:

$$D = c_F F + c_S B \text{ hay } B = -(c_F/c_S)F + D/c_S$$

Đường A chính là đường ràng buộc nguyên liệu 3:

$$0,4F + 0,5B = 20 \text{ hay } B = -0,8F + 40$$

Đường B chính là đường ràng buộc nguyên liệu 1:

$$0,6F + 0,3B = 21 \text{ hay } B = -2F + 40$$

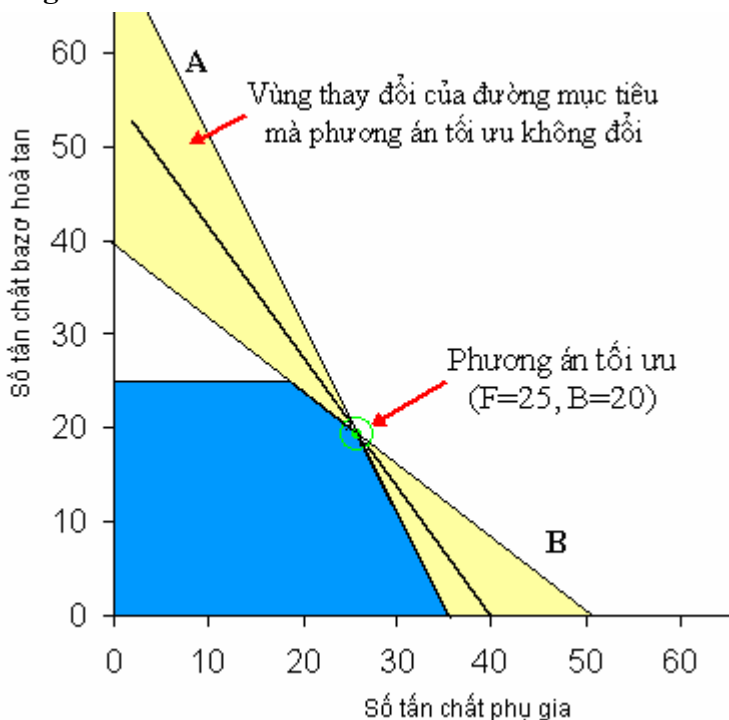
Như vậy, hệ số góc của đường mục tiêu nằm trong giới hạn:

$$-2 \leq -c_F/c_S \leq -0,8 \text{ hay } 2 \geq c_F/c_S \geq 0,8.$$

Với c_S không đổi, tức bằng 30 thì $24 \leq c_S \leq 60$.

Với c_F không đổi, tức bằng 40 thì $20 \leq c_F \leq 50$.

Hình 2-16: Miền thay đổi của đường mục tiêu nhưng phương án tối ưu không đổi



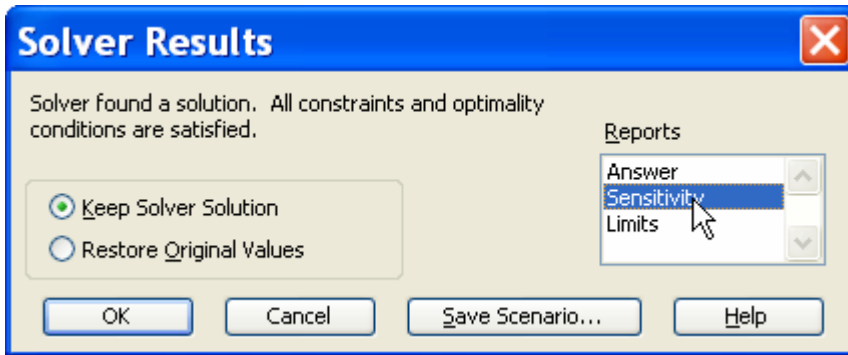
Tuy nhiên, nếu hệ số của hàm mục tiêu thay đổi đủ lớn, điểm cực biên sẽ cho phương án tối ưu mới.

Thật may mắn, phương án qui hoạch tuyến tính bằng máy tính đối với bài toán gốc ABC cung cấp những thông tin phân tích độ nhạy về các hệ số của hàm mục tiêu. Chúng ta không phải xây dựng lại và giải bài toán *qui hoạch tuyến tính để có thông tin phân tích độ nhạy*.

Phân tích độ nhạy rất hữu ích trong phân tích định lượng nhằm hỗ trợ ra quyết định nhưng việc tính toán khá phức tạp. Chính vì vậy, chúng ta cần sử dụng các phần mềm hỗ trợ phân tích định lượng.

Trong EXCEL, nếu muốn phân tích độ nhạy, trong hộp thoại **Solver Results**, chọn thêm mục **Sensitivity** như trên Hình 2-17. Chọn OK, kết quả sẽ xuất hiện trong sheet có tiêu đề Sensitivity Report 1.

Phương án giải được bằng EXCEL với bài toán qui hoạch tuyến tính gốc ABC như trên Bảng 2-12.

Hình 2-17: Hộp thoại Solver Results**Bảng 2-12: Kết quả tính toán độ nhạy bằng EXCEL****Adjustable Cells**

Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
Chất phụ gia	25	0	40	20	16
Bazo hòa tan	20	0	30	20	10

Constraints

Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
Nguyên liệu 1	20	33,333333	20	1,5	6
Nguyên liệu 2	4	0	5	1E+30	1
Nguyên liệu 3	21	44,444444	21	9	2,25

Hãy xem dãy hệ số của hàm mục tiêu. Xem hàng của chất phụ gia F: giới hạn dưới là 24 ngàn đồng (40-16), giá trị hiện tại là 40 ngàn đồng và giới hạn trên là 60 ngàn đồng (40+20). Dãy từ 24 ngàn đồng đến 60 ngàn đồng cung cấp dãy các hệ số hàm mục tiêu đối với chất phụ gia. Vì thế, giả thiết rằng tất cả ảnh hưởng khác đến bài toán tối ưu ABC không thay đổi, lợi nhuận của chất phụ gia có thể từ 24 ngàn đồng mỗi tấn đến 60 ngàn đồng mỗi tấn và phương án F=25 tấn và B=20 tấn sẽ vẫn là phương án tối ưu.

Khi lợi nhuận mỗi tấn chất phụ gia giảm còn 30 ngàn đồng mỗi tấn (trong giới hạn dãy hệ số hàm mục tiêu từ 24 đến 60 ngàn đồng), phương án F=25 tấn và B=20 tấn vẫn tối ưu. Tuy nhiên, khi lợi nhuận mỗi tấn chất phụ gia giảm xuống còn 20 ngàn đồng (nằm ngoài dãy hệ số hàm tiêu), phương án F=25 tấn và B=20 tấn không còn tối ưu nữa. Tóm lại, nếu hệ số hàm mục tiêu ứng với chất phụ gia nằm trong dãy hệ số hàm mục tiêu từ 24 ngàn đồng đến 60 ngàn đồng và tất cả yếu tố của bài toán gốc vẫn không thay đổi, phương án tối ưu của bài toán ABC sẽ vẫn là F=25 tấn và B=20 tấn.

Bây giờ, chúng ta hãy dùng thông tin phân tích độ nhạy như bảng trên để giải

thích về những thay đổi trong hệ số hàm mục tiêu đối với chất bazơ hoà tan. Giả thiết rằng lợi nhuận của mỗi tấn chất phụ gia là 40 ngàn đồng mỗi tấn và tất cả những yếu tố khác của bài toán gốc vẫn không đổi, dãy hệ số hàm mục tiêu đối với chất bazơ hoà tan là từ 20 ngàn đồng đến 50 ngàn đồng. Vì thế, chúng ta có thể kết luận rằng lợi nhuận mỗi tấn chất bazơ hoà tan vẫn nằm trong dãy từ 20 ngàn đồng đến 50 ngàn đồng, phương án $F=25$ và $B=20$ vẫn tối ưu. Nếu lợi nhuận mỗi tấn của chất bazơ hoà tan nằm ngoài dãy này, điểm cực biên khác và phương án khác sẽ tối ưu.

Sự thay đổi đồng thời

Thông tin phân tích độ nhạy theo hệ số của hàm mục tiêu dựa vào giả thiết rằng mỗi lúc chỉ một hệ số hàm mục tiêu thay đổi và tất cả những ảnh hưởng khác của bài toán gốc không thay đổi. Vì thế, dãy hệ số hàm mục tiêu chỉ áp dụng đối với sự thay đổi đối từng hệ số hàm mục tiêu. Tuy nhiên, trong một vài tính huống, chúng ta có lẽ quan tâm cái gì sẽ xảy ra nếu hai hay nhiều hơn hệ số của hàm mục tiêu thay đổi đồng thời. Khi chúng ta biểu diễn, một vài phân tích thay đổi đồng thời là có thể với sự giúp đỡ của qui tắc 100%.

Chúng ta trình bày lại dãy hệ số hàm mục tiêu đối với bài toán ABC ở Bảng 2-13. Cột giảm cho phép (Allowable Decrease) và cột tăng cho phép (Allowable Increase) chỉ định rằng giá trị hiện tại của hệ số hàm mục tiêu có thể giảm hay tăng bao nhiêu mà không thay đổi phương án tối ưu. Giá trị của giảm cho phép và tăng cho phép được máy tính tính như sau:

Giảm cho phép = Giá trị hiện tại – giới hạn dưới

Tăng cho phép = Giới hạn trên - giá trị hiện tại

Bảng 2-13: Dãy hệ số hàm mục tiêu, giảm và tăng cho phép của bài toán ABC

Biến quyết định	Giới hạn dưới	Giá trị hiện tại	Giới hạn trên	Giảm cho phép	Tăng cho phép
F	24	40	60	16	20
B	20	30	50	10	20

Giả sử bộ phận kế toán ABC đánh giá cả giá và chi phí của hai sản phẩm. Theo kết quả, lợi nhuận mỗi tấn chất phụ gia tăng đến 48 ngàn đồng và lợi nhuận mỗi tấn chất bazơ hoà tan giảm xuống 27 ngàn đồng. Vì thế, mỗi tấn chất phụ gia tăng $48 - 40 = 8$ ngàn đồng. Theo Bảng 2-13, chúng ta thấy rằng hệ số tăng của chất phụ gia là 20 ngàn đồng. Vì thế, tỷ lệ tăng của hệ số hàm mục tiêu của chất phụ gia là $8/20 = 0,40$, hay 40%, của lượng tăng cho phép. Tương tự, mỗi tấn chất bazơ hoà tan giảm $30 - 27 = 3$ ngàn đồng. Với lượng giảm cho phép là 10 ngàn đồng, tỷ giảm của hệ số hàm mục tiêu của chất

bazơ hoà tan là $3/10=0,30$ hay 30%, của lượng giảm cho phép. Tổng % tăng của chất phụ gia và % giảm của chất bazơ hoà tan là $40\%+30\%=70\%$. Liệu những thay đổi này có làm thay đổi phương án tối ưu hay không?

Bây giờ, chúng ta hãy xem xét qui tắc 100% cho những thay đổi đồng thời trong những hệ số của hàm mục tiêu.

Qui tắc 100 % đối với các hệ số của hàm mục tiêu

Tất cả các hệ số của hàm mục tiêu thay đổi, tính tổng % tăng cho cho phép và % giảm cho phép. Nếu tổng % không lớn hơn 100, phương án tối ưu không thay đổi.

Áp dụng qui tắc 100% đối với bài toán ABC, chúng ta thấy rằng tổng % tăng cho phép và giảm cho phép là 70%. Vì thế, qui tắc 100% chỉ ra rằng nếu lợi nhuận mỗi tấn chất phụ gia tăng đến 48 ngàn đồng và lợi nhuận mỗi tấn chất bazơ hoà giảm còn 27 ngàn đồng, phương án $F=25$ tấn và $B=20$ tấn vẫn tối ưu. Vì thế, với hệ số của hàm mục tiêu đã điều chỉnh và phương án tối ưu tương tự, tổng lợi nhuận sẽ là $48(25) + 27(20) = 1740$ ngàn đồng.

Cuối cùng, chú ý rằng qui tắc 100% không nói rằng phương án tối ưu sẽ thay đổi nếu tổng % tăng cho phép và giảm cho phép hơn 100%. Chúng ta có thể nói rằng nếu tổng % lớn hơn 100, một phương án tối ưu khác có lẽ tồn tại. Vì thế, bất cứ khi nào tổng % thay đổi là lớn hơn 100, bài toán đã điều chỉnh phải được giải lại để xác định phương án tối ưu mới.

2.5.3. Về phải

Chúng ta hãy mở rộng và mô tả phân tích độ nhạy bằng việc xem xét sự thay đổi ở về phải của ràng buộc ảnh hưởng như thế nào đến miền chấp nhận được và phương án tối ưu của bài toán qui hoạch tuyến tính. Khi phân tích độ nhạy với những thay đổi ở về phải, chúng ta xem xét những gì xảy ra khi chúng ta thực hiện thay đổi từng ràng buộc. Ví dụ, giả sử rằng trong bài toán ABC, chúng ta có thể tăng 4,5 tấn nguyên liệu 3. Trong tình huống này, về phải của ràng buộc thứ 3 tăng từ 21 tấn lên 25,5 tấn. Mô hình qui hoạch tuyến tính ABC đã được sửa như sau:

$$\text{Max } 40F + 30B$$

Ràng buộc

$$0,4F + 0,5B \leq 20 \quad \text{Nguyên liệu 1}$$

$$0,2B \leq 5 \quad \text{Nguyên liệu 2}$$

$$0,6F + 0,3B \leq 25,5 \quad \text{Nguyên liệu 3}$$

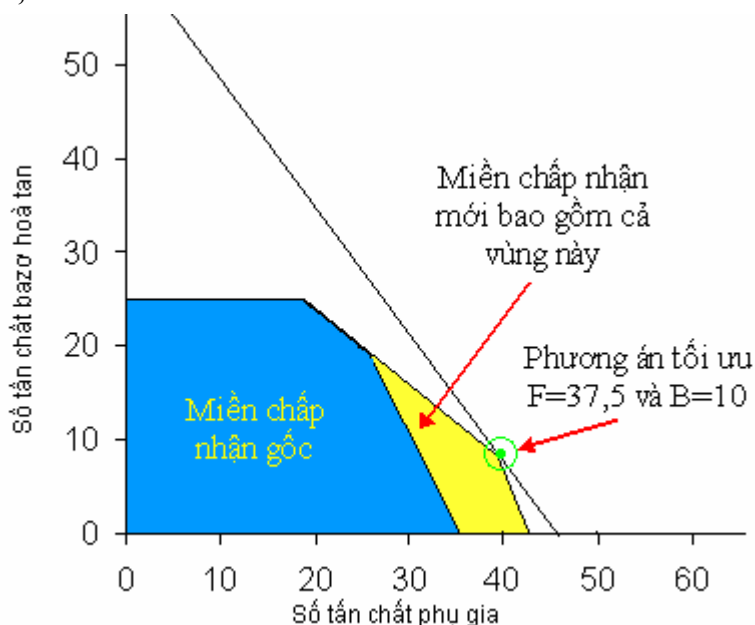
$$F, B \geq 0$$

Phương án đồ thị của bài toán như trên Hình 2-18. Bây giờ miền chấp nhận mở rộng vì có thêm vào 4,5 tấn nguyên liệu 3. Kết quả của thủ tục giải bằng đồ thị thể hiện điểm cực biên $F=37,5$ tấn và $B=10$ tấn là phương án tối ưu mới. Giá trị

của phương án tối ưu là $40(37,5) + 30(10) = 1800$ ngàn đồng. Xem lại phương án tối ưu của bài toán gốc ABC là $F=25$ tấn và $B=20$ tấn và giá trị của hàm mục tiêu là 1600 ngàn đồng. Như thế, với 4,5 tấn nguyên liệu 3 thêm vào, bài toán đã điều chỉnh có phương án tối ưu và giá trị tăng thêm của hàm tối ưu là $1800 - 1600 = 200$ ngàn đồng. Như vậy, ứng với mỗi tấn trong 4,5 tấn nguyên liệu 3 thêm vào đã làm tăng giá trị của hàm tối ưu với tỷ lệ $200/4,5 = 44,444$ ngàn đồng mỗi tấn.

Shadow price (Dual price)² là giá trị cải thiện của hàm tối ưu ứng với mỗi đơn vị tăng thêm ở vế phải của ràng buộc. Do đó, Shadow price đối với nguyên liệu 3 là 44,444 ngàn đồng/ tấn. Nói cách khác, nếu chúng ta tăng vế phải của ràng buộc nguyên liệu 3 một tấn, giá trị của hàm tối ưu sẽ được cải thiện thêm 44,444 ngàn đồng. Ngược lại, nếu chúng ta giảm vế phải của ràng buộc nguyên liệu 3 một tấn, giá trị của hàm tối ưu sẽ mất đi 44,444 ngàn đồng. **Tổng quát, Shadow price phản ánh những gì sẽ xảy ra đối với giá trị của hàm tối ưu nếu thay đổi một đơn vị ở vế phải của ràng buộc.**

Hình 2-18: Phương án của bài toán ABC với ràng buộc 3: $0,6F + 0,5B \leq 24,5$



May mắn, lời giải qui hoạch tuyến tính bằng các phần mềm đối với bài toán qui hoạch tuyến tính gốc cung cấp các Shadow price cho tất cả các ràng buộc. Chúng ta không phải xây dựng và giải lại bài toán *qui hoạch tuyến tính* để

² **Shadow price (Dual price):** thuật ngữ này được một số tài liệu dịch là giá bóng (giá ảo).

được thông tin về *Shadow price*. Lời giải bằng máy tính đối với bài toán qui hoạch tuyến tính ABC gốc được thể hiện trên Cột *Shadow price* trong bảng kết quả. Cột có nhãn *Shadow price* cung cấp thông tin sau:

Ràng buộc	Shadow Price (ngàn đồng)
Nguyên liệu 1	33,333
Nguyên liệu 2	0,000
Nguyên liệu 3	44,444

Chú ý rằng *Shadow price* đối với nguyên liệu là 3 là 44,444 ngàn đồng/tấn phù hợp với việc tính của chúng ta khi dùng thủ tục giải bằng đồ thị. Chúng ta cũng quan sát thấy rằng *Shadow price* đối với nguyên liệu 1 chỉ ra rằng giá trị của phương án tối ưu sẽ cải thiện ở mức 33,333 ngàn đồng/ tấn nguyên liệu 1. Cuối cùng, chú ý rằng *Shadow price* đối với nguyên liệu 2 là 0,00 ngàn đồng/tấn. Xem kết quả, chúng ta thấy rằng phương án tối ưu của bài toán ABC thể hiện rằng nguyên liệu 2 thừa 1 tấn. Như vậy, ở phương án tối ưu có một tấn nguyên liệu 2 là không dùng. *Shadow price* là 0,00 ngàn đồng bảo chúng ta rằng mỗi tấn thêm vào của nguyên liệu 2 tăng phần thừa của nguyên liệu 2 và sẽ không thay đổi giá trị của phương án tối ưu.

Ở đây, chúng ta chú ý rằng giá trị *Shadow price* có lẽ là chỉ áp dụng đối với mức tăng nhỏ ở vế phải. Khi nguồn lực càng nhiều và vế phải tiếp tục tăng, các ràng buộc sẽ thay đổi và phương án tối ưu có thể thay đổi. Tại một vài điểm, *Shadow price* có thể không còn dùng để cải thiện giá trị của phương án tối ưu. Có thể hình thành nên một dãy các giá trị của vế phải mà giá trị của *Shadow price* có thể sử dụng. Tùy theo phần mềm, dãy các giá trị này được cung cấp theo những dạng khác nhau. Trong EXCEL, dãy này được cung cấp trong các cột **Allowable Increase** và **Allowable Decrease**. Khi vế phải của mỗi ràng buộc vẫn nằm trong dãy vế phải này, *Shadow price* vẫn có thể dùng. Ví dụ, với ràng buộc 3, chúng ta thấy rằng *Shadow price* là 44,444 ngàn đồng mỗi tấn đối với nguyên liệu 3 được áp dụng cho đến khi vế phải của ràng buộc 3 còn nằm giữa 18,75 tấn và 30 tấn. Dãy này chỉ ra rằng mỗi tấn thêm vào của nguyên liệu 3 mà ABC có thể thêm vào, lên đến 30 tấn, giá trị của phương án tối ưu sẽ được cải thiện 44,444 ngàn đồng cho mỗi tấn thêm vào. Tuy nhiên, nếu nhiều hơn 30 tấn, ABC không thể *Shadow price* là 44,444 ngàn đồng/tấn có thể dùng được. Tương tự, *Shadow price* đối với ràng buộc 1 là 33,333 ngàn đồng/ tấn cho đến khi lượng nguyên liệu 1 có thể dùng nằm giữa 14 và 21,5 tấn. Chú ý rằng *Shadow price* là 0,00 ngàn đồng đối với ràng buộc 2 là được sử dụng cho đến khi lượng nguyên liệu 2 có thể sử dụng ít nhất là 4 tấn.

Như vậy, chúng ta quan tâm đến sự thay đổi về phải của từng về phải nhưng khi có nhiều sự thay đổi về phải thì vấn đề gì sẽ xảy ra? Khi có sự thay đổi đồng thời về phải, chúng ta nên sử dụng qui tắc 100% sau.

Qui tắc 100% đối với sự thay đổi đồng thời ở về phải: Nếu tổng % thay đổi đồng thời ở về phải của các ràng buộc không vượt quá 100% thì giá trị của Shadow Price vẫn còn hợp lệ.

Để minh họa cho qui tắc này, chúng ta thực hiện một số tính toán sau:

Đối với nguyên liệu 1: Giảm từ 20 xuống 19

$$\% \text{ giảm} = 100 \times \frac{20-19}{6} = 16,67\%$$

Đối với nguyên liệu 3: Tăng từ 21 lên 23

$$\% \text{ tăng} = 100 \times \frac{21-23}{9} = 22,22\%$$

Như vậy, tổng % giảm và % tăng là $16,67\% + 22,22\% = 38,89\%$. Với sự thay đổi này thì các giá trị của Shadow price vẫn còn hợp lệ.

2.6. Qui hoạch nguyên

2.6.1. Các dạng mô hình qui hoạch nguyên

Trong phần này, chúng ta mô tả những bài toán qui hoạch tuyến tính với một hay nhiều biến nhận giá trị nguyên. Những bài toán như thế được gọi là **qui hoạch tuyến tính nguyên**. Trong các ứng dụng của qui hoạch tuyến tính nguyên, một hay nhiều hơn biến nguyên nhận giá trị 1 hay 0. Những biến như thế được gọi là biến 0-1 hay biến nhị phân. Nếu tất cả các biến là biến 0-1, chúng ta có bài toán qui hoạch tuyến tính nguyên 0-1.

Các biến nguyên (đặc biệt biến 0-1) tăng tính linh hoạt đáng kể trong việc xây dựng mô hình. So với bài toán không có biến nguyên, khi giải những bài toán gồm những biến nguyên thường gặp khó khăn hơn nhiều. Bài toán qui hoạch tuyến tính với vài nghìn biến liên tục có thể được giải với bất kỳ phần mềm qui hoạch tuyến tính nào. Tuy nhiên, để giải một bài toán qui hoạch nguyên hoàn toàn với ít hơn 100 biến có thể vô cùng khó khăn. Những phần mềm máy tính có tính thương mại có khả năng giải qui hoạch nguyên có qui mô lớn hơn.

Mục tiêu của phần này là giới thiệu có tính định hướng ứng dụng những bài toán qui hoạch tuyến tính nguyên. Trước tiên, chúng ta mô tả các loại khác nhau của những mô hình qui hoạch tuyến tính nguyên.

Sự khác nhau giữa những bài toán được nghiên cứu trong phần này và những bài toán đã được nghiên cứu ở trên, đó là trong qui hoạch tuyến tính có một hay nhiều hơn biến nguyên. Nếu tất cả các biến đều nguyên, chúng ta có bài

toán **qui hoạch nguyên hoàn toàn**. Mô hình 2 biến sau đây là mô hình qui hoạch nguyên hoàn toàn.

$$\text{Max } 2x_1 + 3x_2$$

Ràng buộc

$$3x_1 + 3x_2 \leq 12$$

$$2/3 x_1 + 1x_2 \leq 4$$

$$1x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ và nguyên}$$

Chú ý rằng nếu chúng ta bỏ cụm từ “và nguyên” khỏi mô hình này, chúng ta có bài toán qui hoạch tuyến tính 2 biến như đã nghiên cứu. Qui hoạch tuyến tính mà do bỏ yêu cầu nguyên gọi là qui hoạch tuyến tính nói lỏng (**LPR**) của qui hoạch tuyến tính nguyên.

Nếu một vài nhưng không phải tất cả các biến đều là biến nguyên, chúng ta có **qui hoạch nguyên bộ phận**. Mô hình hai biến sau đây là qui hoạch nguyên bộ phận.

$$\text{Max } 3x_1 + 4x_2$$

Ràng buộc

$$-1x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$1x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$2x_1 + 1x_2 \leq 16$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ và } x_2 \text{ nguyên}$$

Chúng ta được qui hoạch nguyên nói lỏng (LPR) của qui hoạch nguyên bộ phận bằng cách bỏ ràng buộc x_2 là nguyên.

Trong một vài ứng dụng, biến nguyên chỉ nhận giá trị 0 hay 1, chúng ta có **qui hoạch tuyến tính nguyên 0-1** (qui hoạch nguyên nhị phân).

2.6.2. Giải bài toán qui hoạch nguyên

Công ty bất động sản ASIA có vốn 2000000\$ và dự định mua tài sản cho thuê mới. Sau những khảo sát ban đầu, công ty thấy có thể đầu tư vào biệt thự và chung cư. Công ty có thể mua tối đa 5 biệt thự với giá mỗi cái 282000\$. Mỗi chung cư có thể được mua với 400000\$.

Các nhà quản trị của ASIA có thể dành tối đa đến 140 giờ mỗi tháng cho những tài sản mới này; mỗi biệt thự cần 4 giờ mỗi tháng và mỗi chung cư cần 40 giờ mỗi tháng. Doanh thu hằng năm, sau khi khấu trừ tiền thuê chấp và chi tiêu hoạt động, ước lượng 10000\$ mỗi biệt thự và 15000\$ mỗi chung cư. Các nhà quản trị của ASIA muốn xác định số biệt thự và số chung cư cần mua sao cho cực đại doanh thu hằng năm.

Chúng ta bắt đầu xác định biến quyết định như sau:

B = số biệt thự

C = số chung cư

Hàm mục tiêu (1000\$) là

$$\text{Max}(10B + 15C)$$

Ba ràng buộc phải thoả mãn là:

$$282B + 400C \leq 2000$$

Quỹ khả dụng

$$4B + 40C \leq 140$$

Thời gian của nhà quản trị

$$B \leq 5$$

Số ngôi nhà có thể mua

Biến B và C phải không âm và nguyên. Mô hình bài toán ASIA là qui hoạch tuyến tính nguyên hoàn toàn như sau:

$$\text{Max } 10B + 15C$$

Ràng buộc

$$282B + 400C \leq 2000$$

Quỹ khả dụng

$$4B + 40C \leq 140$$

Thời gian của nhà quản trị

$$B \leq 5$$

Số ngôi nhà có thể mua

$$B, C \geq 0 \text{ và nguyên}$$

Việc giải bài toán ASIA nói riêng và các bài toán qui hoạch nguyên khá phức tạp. Thông thường, chúng ta cần có sự trợ giúp các phần mềm chuyên nghiệp. Đề giải các bài toán qui hoạch nguyên có thể sử dụng các phương pháp sau:

Giải bằng đồ thị bài toán qui hoạch nguyên nói lỏng LPR

Giả sử chúng ta bỏ ràng buộc nguyên đối với B và C và giải bài toán LPR của ASIA. Dùng thủ tục giải bằng đồ thị như đã trình bày ở trên, phương án tối ưu của bài toán qui hoạch tuyến tính như trên Hình 2-19. Đó là B=2,479 biệt thự và C=3,252 chung cư. Giá trị tối ưu của hàm mục tiêu là 73,574. Không may mắn, ASIA không thể mua một phần ngôi biệt thự và chung cư nên phân tích thêm là cần thiết.

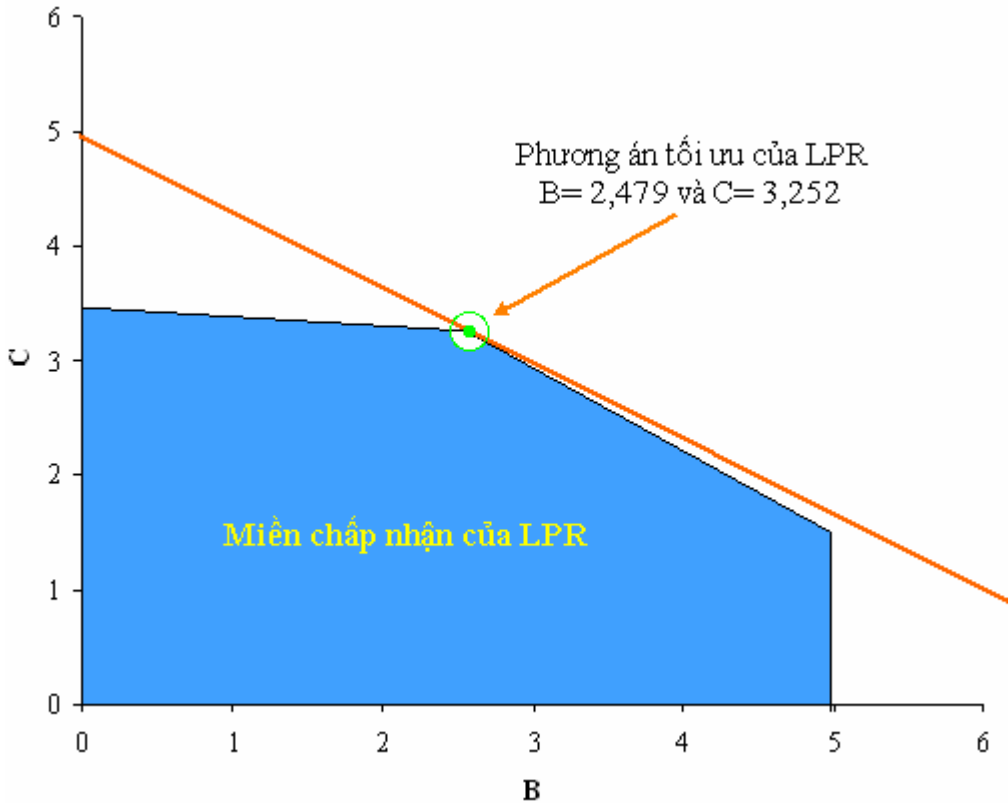
Làm tròn để có phương án nguyên

Trong nhiều trường hợp, phương án không nguyên có thể được làm tròn để có phương án nguyên có thể chấp nhận được. Làm tròn sẽ là một cách tiếp cận chấp nhận được. Bất cứ khi nào làm tròn mà có ảnh hưởng nhỏ đến hàm mục tiêu và các ràng buộc thì hầu hết các các quản trị đều chấp nhận. Một phương án gần tối ưu là tốt rồi.

Tuy nhiên, làm tròn có lẽ không phải là luôn là chiến lược tốt. Khi biến quyết định nhận giá trị nhỏ mà có ảnh hưởng lớn đến hàm mục tiêu và miền chấp nhận, một phương án nguyên là cần thiết. Chúng ta hãy quay lại bài toán

ASIA và kiểm tra ảnh hưởng của làm tròn. Phương án tối ưu của bài toán LPR của ASIA là $B=2,79$ biệt thự và $C=3,252$ chung cư. Vì mỗi chi phí của ngôi nhà là 282000\$ và mỗi chung cư là 400000\$, làm tròn thành phương án nguyên sẽ làm ảnh hưởng đến giá trị hàm mục tiêu và ràng buộc về nguồn lực.

Hình 2-19: Giải bằng đồ thị bài toán LPR đối với bài toán ASIA



Giả sử rằng chúng ta làm tròn phương án LPR để được phương án nguyên $B=2$ và $C=3$, với giá trị của hàm mục tiêu là $10(2) + 15(3) = 65$. Dòng tiền hằng năm 65000\$ thực chất nhỏ hơn 73574\$ đã được xác định bởi phương án của LPR. Liệu làm tròn cách khác được không? Nghiên cứu phương án làm tròn khác như $B=3$ và $C=3$ là không chấp nhận được vì nó đòi hỏi quỹ tiền tệ lớn hơn 2000000\$ mà ASIA có thể có. Phương án làm tròn $B=2$ và $C=4$ cũng không chấp nhận được với lý do tương tự. Trường hợp này, làm tròn đến 2 biệt thự và 3 chung cư với dòng tiền hằng năm là 65000\$ là phương án có thể chấp nhận tốt nhất. Không may mắn, chúng ta không biết phương án này có phải là phương án nguyên tối ưu của bài toán hay không.

Làm tròn để có phương án nguyên là phương pháp thử và sai. Mỗi phương án làm tròn phải được đánh giá tính chấp nhận được cũng như ảnh hưởng của nó đến giá trị của hàm mục tiêu. Dù trong một số trường hợp phương án làm tròn

có thể chấp nhận, chúng ta vẫn không đảm bảo rằng chúng ta có phương án nguyên tối ưu. Chúng ta sẽ thấy rằng phương án đã được làm tròn ($B=2$ và $C=3$) không phải là phương án tối ưu đối với ASIA.

Giải bằng đồ thị đối với bài toán qui hoạch nguyên hoàn toàn

Hình 2-20 thể hiện sự thay đổi trong thủ tục giải qui hoạch tuyến tính bằng đồ thị để giải bài toán qui hoạch tuyến tính nguyên hoàn toàn của ASIA. Đầu tiên, đồ thị của miền được chấp nhận được vẽ chính xác như trong bài toán LPR. Vì phương án tối ưu phải là giá trị nguyên, nên tiếp theo chúng ta xác định phương án nguyên có thể chấp nhận với những điểm như trên Hình 2-20. Cuối cùng, thay vì di chuyển đường của hàm mục tiêu đến điểm cực biên trong miền chấp nhận, chúng ta di chuyển nó theo hướng cải thiện đến những điểm biên (điểm nguyên chấp nhận được) sẽ cho giá trị tốt nhất của hàm mục tiêu. Xem lại Hình 2-20, chúng ta thấy rằng phương án nguyên tối ưu tại điểm $B=4$ biệt thự và $C=2$ chung cư. Giá trị của hàm mục tiêu là $10(4)+15(2)=70$ cung cấp dòng tiền hàng năm là 70000\$. Phương án này có ý nghĩa hơn phương án tốt bằng cách làm tròn: $B=2$, $C=3$ với dòng tiền hàng năm 65000\$. Vì thế, chúng ta thấy rằng làm tròn sẽ không phải là chiến lược tốt cho bài toán ASIA.

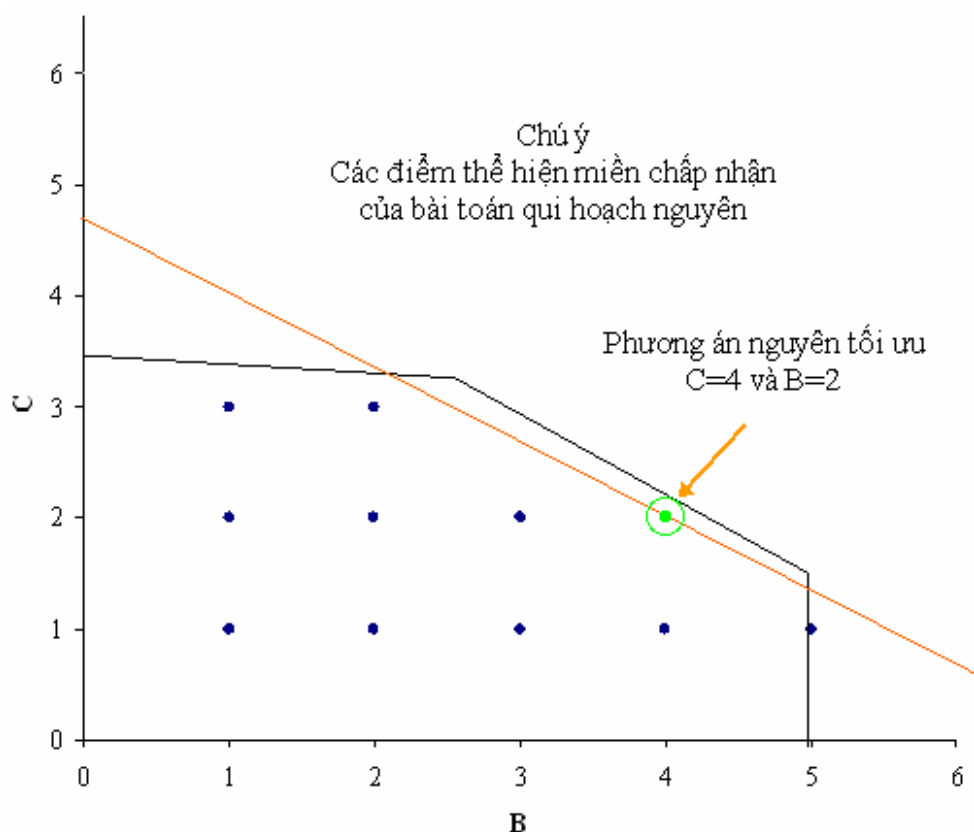
Dùng LPR để thiết lập cận

Một quan sát quan trọng từ phân tích của bài toán ASIA đó là thiết lập mối liên hệ giữa giá trị của phương án nguyên tối ưu và giá trị của phương án tối ưu đối với bài toán LPR.

Đối với qui hoạch tuyến tính nguyên dạng Max, giá trị hàm tối ưu ứng với phương án tối ưu của LPR cung cấp cận trên của giá trị hàm mục tiêu ứng với phương án nguyên tối ưu. Đối với qui hoạch tuyến tính nguyên dạng Min, giá trị hàm mục tiêu ứng với phương án tối ưu của LPR cung cấp cận dưới giá trị hàm mục tiêu ứng với phương án nguyên tối ưu. Sự quan sát này là hợp lý đối với bài toán ASIA. Giá trị hàm mục tiêu ứng với phương án nguyên tối ưu là 70000\$ và giá trị hàm mục tiêu ứng với phương án tối ưu của LPR là 73574\$. Vì thế, chúng ta biết từ giá trị hàm mục tiêu ứng với phương án tối ưu của LPR mà cận trên của giá trị hàm mục tiêu của bài toán nguyên là 73574\$.

Tính chất cận của LPR cho phép chúng ta kết luận rằng, bằng sự thay đổi, phương án của LPR tạo ra phương án nguyên, nó cũng tối ưu đối với bài toán qui hoạch tuyến tính nguyên. Tính chất cận này cũng có thể giúp xác định phương án làm tròn có “đủ tốt” hay không. Nếu làm tròn phương án LPR là chấp nhận và cung cấp giá hàm mục tiêu “tốt gần như” giá trị của hàm mục tiêu đối với LPR, chúng ta biết phương án làm tròn là phương án nguyên gần tối ưu. Trong những tình huống như thế, chúng ta có thể tránh giải bài toán qui hoạch tuyến tính nguyên.

Hình 2-20: Phương án giải bằng đồ thị của bài toán qui hoạch nguyên



Giải bằng máy tính

Như đã nói trước, các phần mềm máy tính có thể giải bài toán qui hoạch tuyến tính nguyên. Tổng quát, những phần mềm này đáng tin cậy cho những bài toán có xấp xỉ 100 biến nguyên và có lẽ được dùng để giải những bài toán có cấu trúc đặc biệt với vài ngàn biến nguyên.

Dữ liệu đầu vào hoàn toàn giống như bất kỳ bài toán qui hoạch tuyến tính nhưng chú ý thêm điều kiện là biến nguyên.

Tùy thuộc vào phần mềm mà việc nhập liệu cho bài toán nguyên hoàn toàn hay qui hoạch nguyên bộ phận có khác nhau.

Trong EXCEL, chúng ta chỉ cần thêm ràng buộc nguyên đối với những biến nguyên là có thể giải được.

Trong WinQSB cũng vậy, khi nhập thuộc tính của biến cần chỉ rõ biến nào là biến nguyên. Giải bằng phần mềm định lượng WinQSB, chúng ta có kết quả cho bài toán ASIA như trên Hình 2-21.

Hình 2-21: Kết quả giải bằng WinQSB

	04:24:25		Sunday	August	26	2007
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status
1	B	4.0000	10.0000	40.0000	0	basic
2	C	2.0000	15.0000	30.0000	0	basic
	Objective	Function	(Max.) =	70.0000		
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price
1	Quy kha dung	1,928.0000	<=	2,000.0000	72.0000	0
2	Thoi gian	96.0000	<=	140.0000	44.0000	0
3	Luong nha co the mua	4.0000	<=	5.0000	1.0000	0

2.6.3. Những ứng dụng qui hoạch có các biến 0–1

Nhiều bài toán qui hoạch tuyến tính nguyên có biến 0-1. Trong những ứng dụng này, biến 0-1 cung cấp sự lựa chọn giá trị của biến bằng 1 tương ứng với hành động đồng ý và bằng 0 nếu hành động là không đồng ý. Các bài toán sau đều dùng biến 0-1.

Dự toán vốn

Công ty thiết bị đông lạnh đang quan tâm đầu tư vào một số dự án: Mở rộng nhà máy, Mở rộng kho, Mua mới máy móc thiết bị, Nghiên cứu sản phẩm mới mà nhu cầu vốn khác nhau qua 4 năm tới. Vì giới hạn nguồn vốn mỗi năm, nhà quản trị muốn chọn những dự án có lợi nhuận lớn nhất. Những giá trị lợi nhuận thuần đã được ước lượng cho mỗi dự án, nhu cầu vốn và nguồn vốn có thể dùng qua các giai đoạn trong 4 năm như Bảng 2-14.

Bảng 2-14: Lợi nhuận thuần, nhu cầu vốn, vốn khả dụng của Công ty

Dự án (1000\$)	Mở rộng nhà máy	Mở rộng kho	Mua mới MMTB	Nghiên cứu sản phẩm mới	Tổng vốn khả dụng
Lợi nhuận	90	40	10	37	
Vốn năm 1	15	10	10	15	40
Vốn năm 2	20	15		10	50
Vốn năm 3	20	20		10	40
Vốn năm 4	15	5	4	10	35

Bốn biến quyết định 0–1 như sau:

$P=1$ nếu dự án mở rộng nhà máy được chấp nhận; 0 nếu bị bác bỏ;

$W=1$ nếu dự án mở rộng kho được chấp nhận; 0 nếu bị bác bỏ;

$M=1$ nếu dự án mua mới MMTB được chấp nhận; 0 nếu bị bác bỏ;

$R=1$ nếu dự án nghiên cứu SP mới được chấp nhận; 0 nếu bị bác bỏ.

Hàm mục tiêu là cực đại lợi nhuận theo giá trị hiện tại thuần của các dự án.

Bài toán có 4 ràng buộc: quỹ khả dụng ở mỗi năm trong 4 năm đến.

Mô hình qui hoạch tuyến tính nguyên 0-1 (1000\$) như sau:

Max $(90P + 40W + 10M + 37R)$

Ràng buộc

15P	+	10W	+	10M	+	15R	≤ 40	Khả năng vốn năm 1
20P	+	15W	+		+	10R	≤ 50	Khả năng vốn năm 2
20P	+	20W	+		+	10R	≤ 40	Khả năng vốn năm 3
15P	+	5W	+	4M	+	10R	≤ 35	Khả năng vốn năm 4

$P, W, M, R = 0, 1$

Phương án qui hoạch nguyên tối ưu giải bằng WinQSB như trên Hình 2-19. Phương án tối ưu là $P=1, W=1, M=1, R=0$, tổng lợi nhuận thuần được ước lượng là 140000\$. Vì thế công ty cấp tiền mở rộng máy móc thiết bị, mở rộng kho và dự án máy móc thiết bị mới. Dự án nghiên cứu sản phẩm mới chưa chấp nhận ngoại trừ huy động thêm vốn. Giá trị của biến phụ (xem Hình 2-22) thể hiện rằng công ty sẽ còn lại 5000\$ trong năm 1; 15000\$ trong năm 2 và 11000\$ trong năm 4. Kiểm tra nhu cầu vốn cho dự án nghiên cứu sản phẩm mới, chúng ta thấy rằng chỉ đủ vốn cho năm 2 và năm 4. Tuy nhiên, công ty sẽ huy động thêm vốn là 10000\$ trong năm 1 và 10000\$ trong năm 3 cho dự án nghiên cứu sản phẩm mới.

Hình 2-22: Giải bằng máy tính bài toán Dự toán vốn

	16:28:38		Sunday	October	02	2005
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status
1	P	1.0000	90.0000	90.0000	0	basic
2	W	1.0000	40.0000	40.0000	40.0000	at bound
3	M	1.0000	10.0000	10.0000	0	basic
4	R	0	37.0000	0	-8.0000	at bound
	Objective	Function	(Max.) =	140.0000		
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price
1	Kha nang von nam 1	35.0000	<=	40.0000	5.0000	0
2	Kha nang von nam 2	35.0000	<=	50.0000	15.0000	0
3	Kha nang von nam 3	40.0000	<=	40.0000	0	4.5000
4	Kha nang von nam 4	24.0000	<=	35.0000	11.0000	0

Chi phí cố định

Trong một số ứng dụng, chi phí sản xuất có hai thành phần: là chi phí cố định (phát sinh khi có tiến hành sản xuất) và chi phí biến đổi (là chi phí có liên quan trực tiếp đến lượng sản xuất). Dùng biến 0-1 để đưa chi phí cố định vào trong mô hình sản xuất.

Xem lại bài toán ABC. Ba nguyên liệu thô được dùng để sản xuất 3 sản phẩm: chất phụ gia, bazơ hoà tan và chất chùi thảm. Bài toán gồm những biến quyết định sau:

F =số tấn chất phụ gia được sản xuất;

B =số tấn chất bazơ hoà tan được sản xuất;

C =số tấn chất chùi thảm được sản xuất.

Lợi nhuận mỗi tấn chất phụ gia là 40 ngàn đồng, bazơ hoà tan 30 ngàn đồng và chất chùi thảm là 50 ngàn đồng. Mỗi tấn chất phụ gia là hỗn hợp của 0,4 tấn nguyên liệu 1 và 0,6 tấn nguyên liệu 3. Mỗi tấn bazơ hoà tan sử dụng 0,5 tấn nguyên liệu 1; 0,2 tấn nguyên liệu 2 và 0,3 tấn nguyên liệu 3. Mỗi tấn chất chùi thảm là hỗn hợp 0,6 tấn nguyên liệu 1; 0,1 tấn nguyên liệu 2 và 0,3 tấn nguyên liệu 3. Hiện nay, công ty ABC có 20 tấn nguyên liệu 1; 5 tấn nguyên liệu 2 và 21 tấn nguyên liệu 3 và quan tâm xác định lượng sản phẩm sản xuất tối ưu. Mô hình qui hoạch tuyến tính của bài toán ABC là:

$$\text{Max } 40F + 30B + 50C$$

Ràng buộc

$$0,4F + 0,5B + 0,6C \leq 20 \quad \text{Nguyên liệu 1}$$

$$0,2B + 0,1C \leq 5 \quad \text{Nguyên liệu 2}$$

$$0,6F + 0,3B + 0,3C \leq 21 \quad \text{Nguyên liệu 3}$$

$$F, B, C \geq 0$$

Giải ra, chúng ta được phương án tối ưu có 27,5 tấn chất phụ gia, 0 tấn bazơ hoà tan và 15 tấn chất chùi thảm với giá trị của hàm mục tiêu 1850 ngàn đồng như Hình 2-23.

Hình 2-23: Phương án giải bằng máy tính đối với bài toán ABC

04:32:36		Sunday	August	26	2007		
Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
F	27.5000	40.0000	1,100.0000	0	basic	33.3333	100.0000
B	0	30.0000	0	-12.5000	at bound	-M	42.5000
C	15.0000	50.0000	750.0000	0	basic	33.3333	60.0000
Objective	Function	(Max.) =	1,850.0000				

Xây dựng bài toán qui hoạch tuyến tính của bài toán ABC không bao gồm chi phí cố định để sản xuất sản phẩm. Giả sử rằng có nguồn dữ liệu về chi phí cố định và lượng sản xuất tối đa cho mỗi sản phẩm như trên Bảng 2-15.

Bảng 2-15: Chi phí cố định và nhu cầu của từng loại sản phẩm

Sản phẩm	Chi phí cố định (ngàn đồng)	Lượng tối đa (tấn)
Chất phụ gia	200	50
Bazơ hoà tan	50	25
Chất chùi thảm	400	40

Biến 0-1 có thể dùng để đưa chi phí cố định vào trong mô hình sản xuất. Biến 0-1 được xác định như sau:

SF = 1 nếu chất phụ gia được sản xuất; 0 nếu không được sản xuất

SB = 1 nếu bazơ hoà tan được sản xuất; 0 nếu không được sản xuất

SC = 1 nếu chất chùi thảm được sản xuất; 0 nếu không được sản xuất

Khi dùng những biến này, tổng chi phí cố định là: $200SF + 50SB + 400SC$

Bây giờ, chúng ta có thể viết lại hàm mục tiêu gồm cả chi phí cố định. Vì thế, lợi nhuận ròng trở thành: $\text{Max } 40F + 30B + 50C - 200SF - 50SB - 400SC$

Tiếp đến, chúng ta phải viết các ràng buộc năng lực sản xuất sao cho nếu biến thiết lập bằng 0, sản phẩm tương ứng không được sản xuất và, nếu biến thiết lập bằng 1, cho phép sản xuất với mức tối đa. Đối với chất phụ gia, chúng ta thêm ràng buộc sau: $F \leq 50SF$.

Chú ý rằng, với ràng buộc này, sản xuất chất phụ gia là không được phép khi $SF = 0$. Khi $SF = 1$, cho sản xuất tới 50 tấn chất phụ gia. Chúng ta có thể nghĩ biến thiết lập như cái công tắc. Khi nó tắt ($SF = 0$), không cho phép sản xuất; khi nó là bật ($SF = 1$), cho phép sản xuất.

Những ràng buộc năng lực sản xuất tương tự, dùng biến 0-1 cho các chất bazơ hoà tan và chất chùi thảm $B \leq 25SB$ và $C \leq 40SC$

Chuyển về tất cả biến sang về bên trái của các ràng buộc, chúng ta được mô hình chi phí cố định của bài toán ABC như sau:

$$\text{Max } 40F + 30B + 50C - 200SF - 50SB - 400SC$$

Ràng buộc

$$0,4F + 0,5B + 0,6C \leq 20 \quad \text{Nguyên liệu 1}$$

$$0,2B + 0,1C \leq 5 \quad \text{Nguyên liệu 2}$$

$$0,6F + 0,3B + 0,3C \leq 1 \quad \text{Nguyên liệu 3}$$

$$F - 50SF \leq 0 \quad \text{Max F}$$

$$B - 25SB \leq 0 \quad \text{Max B}$$

$$C - 40SC \leq 0 \quad \text{Max C}$$

$$F, B, C \geq 0; SF, SB, SC = 0, 1$$

Chúng ta giải bài toán ABC bằng WinQSB. Với kết quả như Hình 2-24,

phương án tối ưu gồm 25 tấn chất phụ gia và 20 tấn bazơ hoà tan. Giá trị của hàm mục tiêu sau khi khấu trừ chi phí cố định là 1350 ngàn đồng. Chi phí cố định của chất phụ gia và bazơ hoà tan là $200+50=250$ ngàn đồng. Phương án tối ưu thể hiện $SC=0$, chỉ ra rằng chi phí cố định của chất chùi thảm cao hơn 400 ngàn đồng nên tránh. Vì thế chất chùi thảm là không sản xuất.

Hình 2-24: Giải bằng máy tính đối với bài toán ABC có chi phí cố định

04:48:49		Sunday	August	26	2007
Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status
F	25.0000	40.0000	999.9999	0	basic
B	20.0000	30.0000	600.0001	0	basic
C	0	50.0000	0	0	basic
SF	1.0000	-200.0000	-200.0000	-200.0000	at bound
SB	1.0000	-50.0000	-50.0000	-50.0000	at bound
SC	0	-400.0000	0	-400.0000	at bound
Objective	Function	(Max.) =	1,350.0000		

Mấu chốt để phát triển bài toán chi phí cố định là dùng biến 0-1 cho mỗi chi phí cố định và chỉ ra cận trên cho biến sản xuất tương ứng. Đối với lượng sản phẩm sản xuất x , ràng buộc theo dạng $x \leq My$ có thể được dùng để cho phép sản xuất khi biến thiết lập $y=1$ và không cho phép sản xuất khi biến thiết lập $y=0$. Lượng sản phẩm sản xuất tối đa M sẽ đủ lớn để cho phép tất cả các mức sản xuất hợp lý nhưng người nghiên cứu không chọn giá trị M quá lớn.

Dùng biến 0–1 nhằm tăng tính linh hoạt trong việc xây dựng mô hình

Như vậy, chúng ta đã nghiên cứu các ứng dụng có các biến 0-1. Trong phần này, chúng ta tiếp tục sử dụng biến 0-1 trong mô hình. Trước tiên, chúng ta trình bày các biến 0-1 được sử dụng như thế nào để mô hình hoá các ràng buộc đa lựa chọn. Sau đó, chúng ta trình bày các biến 0–1 được sử dụng như thế nào để mô hình hoá những tình huống mà trong đó cần lựa chọn k trong số n dự án, cũng như tình huống mà trong đó chấp nhận dự án này là điều kiện chấp nhận dự án khác.

Những ràng buộc đa lựa chọn và ràng buộc loại trừ nhau

Xem lại bài toán về phân bổ vốn của công ty Đông lạnh đã giới thiệu ở trước. Các biến quyết định được xác định như sau:

$P=1$ nếu dự án mở rộng nhà máy được chấp nhận; 0 nếu bị bác bỏ;

$W=1$ nếu dự án mở rộng kho được chấp nhận; 0 nếu bị bác bỏ;

$M=1$ nếu dự án mua mới máy móc thiết bị được chấp nhận; 0 nếu bị bác bỏ;

$R=1$ nếu dự án nghiên cứu sản phẩm mới được chấp nhận; 0 nếu bị bác bỏ.

Giả sử rằng, thay vì một dự án mở rộng kho, Công ty Đông lạnh có 3 dự án

mở rộng kho để xem xét. Một kho phải được mở rộng vì tăng nhu cầu sản phẩm, nhưng nhu cầu mới không đủ tiền để xây dựng nhiều hơn một kho. Những định nghĩa biến và các ràng buộc đã lựa chọn sau có thể được hợp nhất vào mô hình qui hoạch nguyên 0-1 để phản ánh tình huống này.

$W_1=1$ nếu dự án mở rộng kho gốc được chấp nhận; 0 nếu bị bác bỏ;

$W_2=1$ nếu dự án mở rộng kho thứ hai được chấp nhận; 0 nếu bị bác bỏ;

$W_3=1$ nếu dự án mở rộng kho thứ ba được chấp nhận; 0 nếu bị bác bỏ.

Các ràng buộc đã lựa chọn đòi hỏi một trong các dự án này phải được chọn:

$$W_1+W_2+W_3=1$$

Vì W_1 , W_2 và W_3 cho phép giả sử rằng chỉ một giá trị 0 hay 1, một và chỉ một trong ba dự án được lựa chọn.

Nếu yêu cầu một kho phải mở rộng không tồn tại, ràng buộc đã lựa chọn có thể được điều chỉnh như sau:

$$W_1+W_2+W_3 \leq 1$$

Sự điều chỉnh này cho phép tình huống không có kho nào được mở rộng ($W_1=W_2=W_3=0$) nhưng không cho phép mở rộng nhiều hơn một kho. Những loại ràng buộc này thường được gọi là ràng buộc loại trừ lẫn nhau.

Ràng buộc k trong số n phương án

Mở rộng khái niệm ràng buộc đã lựa chọn có thể được dùng để mô hình hoá tình huống lựa chọn k trong số n dự án — **ràng buộc k trong số n phương án**. Giả sử rằng W_1 , W_2 , W_3 , W_4 và W_5 thể hiện 5 dự án mở rộng kho và chỉ chọn 2 trong 5 dự án. Các ràng buộc thỏa mãn điều kiện mới là:

$$W_1+W_2+W_3+W_4+W_5=2$$

Nếu không nhiều hơn hai dự án được lựa chọn, chúng ta sẽ dùng ràng buộc như sau:

$$W_1+W_2+W_3+W_4+W_5 \leq 2$$

Mỗi trong các biến này phải bị ràng buộc giá trị 0-1.

Ràng buộc có điều kiện và ràng buộc tiên quyết

Thỉnh thoảng sự chấp nhận của một dự án là điều kiện chấp nhận dự án khác. Ví dụ, giả sử rằng đối với Công ty Thiết bị Đông lạnh, dự án mở rộng kho là điều kiện của dự án mở rộng nhà máy. Điều đó có nghĩa là, các nhà quản trị sẽ không xem xét mở rộng kho trừ khi nhà máy được mở rộng. Với P thể hiện mở rộng nhà máy và W thể hiện mở rộng nhà kho, **ràng buộc có điều kiện** có thể được sử dụng để thể hiện ràng buộc này:

$$W \leq P$$

Cả P và W bằng 0 hay 1. Vậy, bất cứ khi nào $P=0$ thì $W=0$. Khi $P=1$, W cũng

có thể bằng 1; vì thế, cả nhà máy và kho có thể được mở rộng. Tuy nhiên, chúng ta chú ý rằng ràng buộc có trước không buộc dự án mở rộng kho phải được chấp nhận nếu dự án mở rộng máy móc thiết bị được chấp nhận.

Nếu dự án mở rộng kho được chấp nhận bất cứ khi nào dự án nhà máy được chấp nhận, chúng ta sẽ nói rằng P và W thể ràng buộc tiên quyết. Để mô hình hoá tình huống này, chúng ta viết ràng buộc như sau:

$$W = P$$

Ràng buộc bắt buộc P và W nhận giá trị như nhau.

ΔChú ý khi phân tích độ nhạy đối với qui hoạch nguyên

Phân tích độ nhạy đối với bài toán qui hoạch tuyến tính nguyên thường quan trọng hơn so với những qui hoạch tuyến tính khác. Một sự thay đổi nhỏ trong các hệ số của các ràng buộc có thể là nguyên nhân dẫn đến sự thay đổi lớn trong giá trị của phương án tối ưu. Để hiểu tại sao, hãy xem xét bài toán qui hoạch nguyên **Dự toán vốn** cho 4 dự án và ràng buộc ngân sách:

$$\text{Max } 40x_1 + 60x_2 + 70x_3 + 160x_4$$

Ràng buộc

$$16x_1 + 35x_2 + 45x_3 + 85x_4 \leq 100$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 = 0, 1$$

Chúng ta có phương án tối ưu: $x_1=1, x_2=1, x_3=1$ và $x_4=0$, với giá trị hàm mục tiêu 170 ngàn đồng. Tuy nhiên, nếu ngân sách khả dụng tăng 1 ngàn đồng (từ 100 ngàn đồng đến 101 ngàn đồng), phương án tối ưu là $x_1=1, x_2=0, x_3=0$ và $x_4=1$, với giá trị hàm mục tiêu là 200 ngàn đồng. Điều đó có nghĩa là, tăng 1 ngàn đồng trong ngân sách dẫn đến tăng 30 ngàn đồng lợi nhuận. Chắc chắn nhà quản trị, khi đối mặt tình huống như thế, sẽ tăng 1 ngàn đồng cho ngân sách. Vì giá trị của phương án tối ưu rất nhạy đối với các hệ số của các ràng buộc, những nhà thực hành khuyên chúng ta cần giải bài toán qui hoạch tuyến tính nguyên vài lần với những thay đổi nhỏ của các hệ số trước khi chọn phương án tốt nhất để triển khai.

Câu hỏi ôn tập

1. Thế nào là bài toán qui hoạch tuyến tính?
2. Hãy nêu một số ứng dụng của bài toán qui hoạch tuyến tính trong kinh tế.
3. Nêu các dạng khác nhau của bài toán qui hoạch tuyến tính. Nêu cách chuyển đổi các dạng của bài toán qui hoạch tuyến tính.

4. Nêu các bước giải bài toán qui hoạch tuyến tính bằng phương pháp đồ thị.
5. Nêu các bước giải bài toán qui hoạch tuyến tính bằng phương pháp đơn hình.
6. Thế nào là bài toán đối ngẫu, hãy nêu cách chuyển bài toán dạng tổng quát sang bài toán đối ngẫu.
7. Thế nào là phân tích độ nhạy? Nêu những ứng dụng của phân tích độ nhạy trong kinh tế.
8. Nêu qui tắc 100% trong phân tích độ nhạy hệ số hàm mục tiêu.
9. Nêu qui tắc 100% trong phân tích độ nhạy vế phải.
10. Thế nào là bài toán qui hoạch nguyên? Nêu các loại bài toán qui hoạch nguyên.
11. Thế nào là bài toán qui hoạch nguyên 0-1? Nêu những ứng dụng của các loại bài toán qui hoạch nguyên 0-1.
12. Nêu các bước giải bài toán qui hoạch tuyến tính bằng EXCEL
13. Nêu các bước giải bài toán qui hoạch tuyến tính bằng WinQSB

Bài tập

2.1. Những mối liên hệ toán học nào sau đây có hay không có trong bài toán qui hoạch tuyến tính, tại sao?

$$-2x_1 + 2x_2 - 11x_3 \leq 70$$

$$2x_1 + 2x_2 \leq 50$$

$$3x_2 - 2x_2^2 + 4x_3 \geq 10$$

$$3x_1 - 11x_2 \geq 15$$

$$31x_1 + 21x_2 - 16x_3 = 6$$

$$2x_1 + 5x_2 - x_1x_2 \geq 25$$

2.2. Tìm những phương án thoả mãn những ràng buộc sau:

$$4x_1 + 2x_2 \leq 16$$

$$4x_1 + 2x_2 \geq 16$$

$$4x_1 + 2x_2 = 16$$

2.3. Vẽ đồ thị những đường ràng buộc và tìm những phương án thoả mãn các ràng buộc sau:

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$12x_1 + 8x_2 \geq 480$$

$$5x_1 + 10x_2 = 200$$

2.4. Vẽ đồ thị những đường ràng buộc và tìm những phương án thoả mãn các ràng buộc sau:

$$x_1 \geq 0,25 (x_1 + x_2)$$

$$x_2 \leq 0,10 (x_1 + x_2)$$

$$x_1 \leq 0,50 (x_1 + x_2)$$

2.5. Có hàm mục tiêu của những bài toán qui hoạch tuyến tính là $7x_1 + 10x_2$, $6x_1 + 4x_2$ và $-4x_1 + 7x_2$. Vẽ đồ thị cho những giá trị của hàm mục tiêu bằng 420.

2.6. Xác định vùng chấp nhận với ràng buộc sau:

$$0,5x_1 + 0,25x_2 \geq 30$$

$$1x_1 + 5x_2 \geq 250$$

$$0,25x_1 + 0,5x_2 \leq 50$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

2.7. Xác định vùng chấp nhận với những ràng buộc sau:

$$2x_1 - 1x_2 \leq 0$$

$$-1x_1 + 1,5x_2 \leq 200$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

2.8. Xác định vùng chấp nhận cho những ràng buộc sau:

$$3x_1 - 2x_2 \geq 0$$

$$2x_1 - 1x_2 \leq 200$$

$$1x_1 \leq 150$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

2.9. Cho bài toán qui hoạch tuyến tính

$$\text{Max } 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{S.t. } x_1 + 2x_2 \geq 6$$

$$5x_1 + 3x_2 \leq 15$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

a. Chuyển bài toán về dạng chính tắc;

b. Dùng thủ tục đồ thị để tìm phương án tối ưu;

c. Giá trị của hàm tối ưu tương ứng với phương án tối ưu?

2.10. Cho bài toán qui hoạch tuyến tính như sau:

$$\text{Max } 5x_1 + 5x_2$$

$$\text{S.t. } x_1 \leq 100$$

$$x_2 \leq 80$$

$$2x_1 + 4x_2 \leq 400$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- Dùng phương pháp đồ thị để giải bài toán;
- Giả sử biến x_2 nguyên, hãy giải lại bài toán.

2.11. Xem bài toán qui hoạch tuyến tính sau:

$$\text{Max } 3x_1 + 3x_2$$

$$\text{S.t. } 2x_1 + 4x_2 \leq 12$$

$$6x_1 + 4x_2 \leq 24$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- Chuyển bài toán về dạng chuẩn tắc;
- Dùng phương pháp đồ thị để giải;
- Nếu hàm mục tiêu thay đổi thành $2x_1 + 6x_2$, phương án tối ưu là bao nhiêu?
- Có bao nhiêu điểm cực biên? Giá trị của x_1 và x_2 tại điểm cực biên?

2.12. Xem bài toán qui hoạch tuyến tính sau:

$$\text{Max } x_1 + 2x_2$$

$$\text{S.t. } x_1 \leq 5$$

$$x_2 \leq 4$$

$$2x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- Vẽ vùng chấp nhận;
- Những điểm cực biên của vùng chấp nhận là gì?
- Tìm phương án tối ưu bằng phương pháp đồ thị.

2.13. Công ty Embassy Motorcycles (EM) sản xuất hai loại xe mô tô với thiết kế điều khiển đơn giản và an toàn. Mô hình EZ-Rider sử dụng kiểu động cơ mới, dáng xe thấp nên dễ điều khiển. Mô hình Lady-Sport lớn hơn một chút, dùng kiểu động cơ truyền thống và thiết kế đặc biệt cho nữ. Công ty sản xuất hai động cơ trên tại nhà máy Des Moines. Mỗi động cơ EZ-Rider yêu cầu 6 giờ sản xuất và mỗi động cơ Lady-Sport yêu cầu 3 giờ sản xuất. Nhà máy Des Moines có 2100 giờ sản xuất dành cho thời kỳ sản xuất đến. Khung xe được nhà cung cấp đảm bảo số lượng theo yêu cầu. Tuy nhiên, khung xe Lady-Sport phức tạp hơn nên nhà cung cấp chỉ có thể đáp ứng nhiều nhất 280 khung cho thời kỳ sản xuất đến. Công việc lắp ráp và kiểm tra yêu cầu 2 giờ đối với xe EZ-Rider và 2,5 giờ đối với xe Lady-Sport. Thời gian tối đa cho công việc lắp ráp và kiểm tra cho thời kỳ sản xuất đến là 1.000 giờ. Bộ phận

kế toán dự kiến mỗi xe EZ-Rider có mức lợi nhuận 2.400\$ và mỗi xe Lady – Sport là 1800\$.

- Xây dựng mô hình qui hoạch tuyến tính để xác định số máy cần sản xuất cho mỗi loại sao cho tối đa lợi nhuận;
- Giải bài toán bằng phương pháp đồ thị;
- Giải bài toán bằng phương pháp đơn hình.

2.14. Par, Inc. là công ty sản xuất các dụng cụ và đồ dụng chơi golf. Nhà phân phối thuyết phục với công ty Par là hiện đang có một thị trường cho cả các túi golf giá trung bình (kiểu chuẩn) và túi golf giá cao (kiểu cao cấp). Các nhà phân phối tin tưởng vào thị trường này nên nếu các túi golf có giá cạnh tranh thì họ sẽ mua toàn bộ túi mà Par sản xuất trong 3 tháng đến. Bảng sau giới thiệu định mức thời gian và lợi nhuận đơn vị của mỗi loại túi golf:

Thời gian sản xuất (giờ)					
Sản phẩm	Cắt và nhuộm	May	Hoàn thành	Kiểm tra và đóng gói	Lợi nhuận biên (\$)
Chuẩn	7/10	1/2	1	1/10	10
Cao cấp	1	5/6	2/3	1/4	9

Trong 3 tháng đến, giám đốc sản xuất dự tính chỉ có 630 giờ cắt và nhuộm, 600 giờ may, 708 giờ hoàn thành và 135 giờ kiểm tra và đóng gói là khả thi để sản xuất túi golf.

- Công ty cần sản xuất bao nhiêu túi để tối đa lợi nhuận?
- Lợi nhuận của công ty là bao nhiêu khi sản xuất số lượng túi này?
- Bao nhiêu giờ được sử dụng cho mỗi hoạt động sản xuất?
- Thời gian thừa của mỗi loại hoạt động?

2.15. Giả sử rằng các nhà quản trị của Par (Bài 2.14) gặp phải những tình huống sau:

- Bộ phận kế toán điều chỉnh mức lợi nhuận dự tính cho loại túi cao cấp là 18\$.
- Nhờ vào một nguyên liệu mới giá thấp để sản xuất loại túi chuẩn nên lợi nhuận đơn vị cho mỗi túi chuẩn tăng lên 20\$. (Giả sử rằng lợi nhuận đơn vị của túi cao cấp vẫn là 9\$)
- Nhờ vào thiết bị may mới nên cho phép tăng năng lực may đến 750 giờ (giả thiết hàm mục tiêu $10x_1 + 9x_2$ vẫn thích hợp)

Nếu xem xét các tình huống trên một cách độc lập, hãy xác định phương án tối ưu và tổng lợi nhuận?